ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΪΟΥ 2018

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 3

Θέμα Α

Α₁. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

Α₂. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α₃. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο διάστημα Δ;

Μονάδες 3

Α₄. Να αποδείξετε κάθε μια από τις παρακάτω «μικρές» προτάσεις.

(1) Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε διάστημα Δ, για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta \in \Delta$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

(2) Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ (ή $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$).

Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ x \in [\alpha,\beta]$.

(3) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 – 1» στο Δ.

(4) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$, έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$ και $f(0) = 2^{-1}$, $f(1) = 3^{-1}$, τότε η f' δεν είναι «1 – 1».

Μονάδες 12

Θέμα Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, ώστε $f(1) = 1 + e^{-1}$ για την οποία ισχύει $x^2 f^2(x) - 2xf(x) = x^2 e^{-2x} - 1$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Β₁. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Β₂. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(e^x) = x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Μονάδες 8

Β₃. Να λυθεί η εξίσωση $e^{x-3} - e^{-x-1} = \dfrac{2-2x}{(x+1)(3-x)}$.

Μονάδες 6

Β₄. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \ln\left(f(x)+1\right) - \ln f(x)\right)$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ₂. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Μονάδες 6

Γ₃. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$. Στη συνέχεια αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f\left(x\right)=x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 8

Γ₄. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\left(\ln x\right)\ln\left(f\left(x\right)\right)\right]$

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η τρείς φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=1+f\left(0\right)$, $f'\left(0\right)<f\left(1\right)-f\left(0\right)$ και $f''\left(x\right)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₁. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$.

Μονάδες 3

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Δ₃. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{xg\left(x\right)}$.

Μονάδες 6

Δ₄. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f\left(x\right)dx>2$.

Μονάδες 5

Δ₅. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη Cg, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ είναι $E\left(\Omega\right)=e-\dfrac{5}{2}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f\left(x\right)dx$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$, ώστε $\int_0^{\xi} f\left(t\right)dt=2$.

Μονάδες 6