ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 10

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $[\alpha, \beta)$, τότε η f παίρνει πάντα στο $[\alpha, \beta]$ μια ελάχιστη τιμή

β) Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

γ) αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο (α, β) τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

δ) Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f', υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = f(1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f\,'$ αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 5

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ 2 ρίζες.

Μονάδες 5

δ) Υπάρχει $\xi \in R$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$

Μονάδες 5

ε) Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Η συνάρτηση $f\colon R \to R$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:
$f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ (1) και

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)f(x) + \eta\mu(x^2 - 4)}{\sqrt{x-1} - 1} = -2 \quad (2)$$

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = -5$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{x_0 - 1} + \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{2016}{f(x_0)} .$$

Μονάδες 10(5+5)

Γ2. Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x) + f(x^2) = 2x^2$, για κάθε $x \in R$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = -2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο της (1, f (1)).

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε :

$$(\xi - 3)f'(\xi) + f(\xi) = 1$$

Μονάδες 15(5+5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν : $f(\alpha - 1) > \alpha - 1$ (1) , $f(\alpha) < \alpha$ (2) και $f(\alpha + 1) > \alpha + 1$ (3) για κάποιο $\alpha \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημόριου , έχουν δυο τουλάχιστον κοινά σημεία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) - 1 = f(x) - x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α – 1 , α + 1).

γ) Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$, ώστε $f''(\xi) > 0$.

Μονάδες 15(5+5+5)

Δ2. Έστω f :[0, 1]→ R μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν: f ΄(0) = f ΄(1) = 0 (1) και f (0) = 0 (2)

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + x$

Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης Cg της συνάρτησης g, στα σημεία της με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3 = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $g(1) = 0$

β) Υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$ ώστε $g'(\xi) + 2\xi = 1$

Μονάδες 10(5+5)