ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ26-4-21
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:… ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)..

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο x_0 Ισχύει το αντίστροφο ; (δικαιολογήστε την απάντηση σας)

Μονάδες 9

Α2.Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος.

Μονάδες 3

Α3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 3

Α4.Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$, τότε f(α) είναι πάντα μέγιστο της f.

β) Αν μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\big(f(x)\big)=x\,,x\in A$ και $f\big(f^{-1}(y)\big)=y\,,y\in f(A)$

γ)Αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

ε) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο α με α >ο και ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y>0$ (1)

• $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$

β) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

γ) η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 18(6+6+6)

Β2. Αν η ευθεία $\varepsilon: x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+\alpha x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει

$x^2\ln|x|+\alpha x\geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, για κάθε $x\neq 0$.

Γ1. α) Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f'(x)=2x\ln|x|+x+\alpha$. και να αποδείξτε ότι $f'(0)=\alpha=0$.

Μονάδες 5

Γ2. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε το σημείο καμπής.

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x - 1$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Για ποια x ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

δ) Να αποδείξετε ότι : $2f(1 + h) < f(1 + 2h)$, όπου $h > 0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη και συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $g'(x) = f(x)$ για κάθε x στο $[0, +\infty)$. Αν ισχύουν :

1) $g(1) = 1$ και $g(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{(f(x))^{2021}}{x^{2020} \cdot ημx} = 0$

3) $f(0) = 0$

4) $f''(x) \neq 0$ και συνεχής στο $[0, +\infty)$

Να δείξετε ότι :

α) $f(1) = 1$

β) $f'(0) = 0$ και ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) > 0$

γ) η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 15(5+6+4)

Δ2. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $(f'(x))^2 = f''(x)f(x) - f(x)f'(x)$, για κάθε $x \in R$ (1)
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ (2)
- $f(0) = f'(0) = e$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e^x}$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , ξ_2 και $\xi \in (0,e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ για τα οποία ισχύει :

$$f'(\xi_1) + (e-1)f'(\xi_2) + f'(1) = f''(\xi) + f(e)$$

Μονάδες 10(5+5)