

**ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ**  
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 10-5-21**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

Κατακόρυφη ασύμπτωτη συνάρτησης  $f$  –τοπικό ελάχιστο συνάρτησης  $f$   
**Μονάδες 4**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

i) Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

ii) Αν  $f'(x) < 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

iii) Αν η  $f'(x)$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Μονάδες 9**

**A3.** Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε την σωστή απάντηση

**α)** Από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** ισχύει η:

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

B.  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Γ.  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Δ.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ , όπου  $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και  $g(x) \neq u_0$

κοντά στο  $x_0$ .

Ε. η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , αν και μόνο αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

β) Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{1-x}$  είναι ίσο με :

A.  $\frac{1}{2}$     B.  $\frac{1}{4}$     Γ. 0    Δ.  $-\frac{\pi}{2}$     E.  $\frac{\pi}{2}$

γ) Αν  $(f^{-1} \circ g)(x+1) = 3x+4$  και  $g(x) = 2x-3$ , το  $f(1)$  είναι ίσο με :

A. -1    B. -2    Γ. -3    Δ. 0    E. 1

δ) Αν  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \alpha h}{h} = 0, \alpha \in \mathbb{R}$  τότε:

A.  $f'(x_0) = 0$     B.  $f'(x_0) = -\alpha$     Γ.  $f'(x_0) = \alpha$   
Δ.  $f'(x_0) = x_0$     E.  $f'(x_0) = h$

**Μονάδες 8**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  με  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η συνάρτηση  $f^2$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$

γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k_1 \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k_2 \in \mathbb{R}$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Μονάδες 4**

## **ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Δίνεται συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει:  $xf(x) \ln[f(x)] = 1$  για

κάθε  $x > 0$

α) Να δείξετε ότι:  $f(x) > 1$  για κάθε  $x > 0$

β) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$

γ) Να δείξετε ότι ισχύει:  $f(x)f(f(x)) > f(1)$  για κάθε  $x > 0$

δ) Αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  για τους οποίους ισχύει:  $f(x_1) = e$  και  $f(x_2) = e^2$ , να βρείτε τους  $x_1, x_2$ .

**Μονάδες 20(5+5+5+5)**

**B2.** Δίνονται δυο συναρτήσεις  $f, g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει:  $f^2(x) + g^2(x) + 5 \leq 2f(x) + 4g(x) + \left| \eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x)$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση  $f$  τρεις φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f^{(3)}(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν  $f'(2) > 0$ ,  $f^{(3)}(2) > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) + f(4-x) = 3$ , τότε:

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f''$  είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2f(x) = 3$  έχει μια ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Αν η γραφική παράσταση  $C_g$  της συνάρτησης  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$  τέμνει

τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο  $M$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .

**Μονάδες 5**

**Γ5.** Για  $x \geq 2$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$  είναι αδύνατη.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(xy) = f(x)f(y) - \frac{x^2 + y^2}{xy}, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $f(1) = 2$  και  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} f(x) \right]^{x^2}$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $x \left( x + \sin \frac{\pi}{x} \right) = x - 1$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$

**Μονάδες 7**

**Πολύτροπη**  
Αρμενία

**Μονάδες χ**