<u>**ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ**</u>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 26-4-21

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:… ΤΕΣΣΕΡΙΣ (10)..

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο x_0 Ισχύει το αντίστροφο ; (**Θεωρία** . Δεν ισχύει το αντίστροφο δες σχολικό βιβλίο για την $f(x) = |x|$))

Μονάδες 9

Α2.Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος. (**Θεωρία**)

Μονάδες 3

Α3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (**Θεωρία**)

Μονάδες 3

Α4.Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha,+\infty)$, τότε f(α) είναι πάντα μέγιστο της f. **Λ**

β) Αν μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x\,,x\in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y\,,y\in f(A)$ **Σ**

γ)Αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$ **Λ**.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0. **Λ**

ε) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} **Σ**.

ΘΕΜΑ Β

α)

Για $y=1$ και $x>0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x\cdot 1)=f(x)\cdot f(1)\Leftrightarrow f(x)=f(x)f(1)\Leftrightarrow f(x)\big(1-f(1)\big)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(1)=1 \ (3)$$

Για $x>0$ και $y=\frac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \ (4)$$

β)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι: $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (5) Από την υπόθεση είναι $f(0)=0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

γ)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\alpha>0$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ (6) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_0\in(0,+\infty)$. Έστω $x_0\in(0,+\infty)$, τότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με $x\neq x_0$ θέτουμε $x=x_0\frac{h}{\alpha}$ με $h>0$, οπότε όταν το $x\to x_0$ το $h\to\alpha$ και έχουμε

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_0)}{x_0\frac{h}{\alpha}-x_0}\overset{(1)}{=}\frac{f(x_0)f\left(\frac{h}{\alpha}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0(h-\alpha)}{\alpha}}=$$

$$=\frac{\alpha f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(1)}{=}\frac{\alpha f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha}\overset{(4)}{=}\frac{\alpha f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\alpha)}-1}{h-\alpha}=\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}\cdot\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{h\to\alpha}\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}=\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$, αφού $\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim\limits_{h\to\alpha}\frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\overset{(6)}{=}f'(\alpha)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to\alpha}\left(\dfrac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}\cdot\dfrac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}\right)=\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}\cdot\lim\limits_{h\to\alpha}\dfrac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$

$=\dfrac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$. Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in(0,+\infty)$ με $f'(x_0)=\dfrac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)\in R$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)$. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$f'(x)=\dfrac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)}\cdot f'(\alpha)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}$ (7)

Μονάδες 18(6+6+6)

Β2.

Είναι: $M(\alpha,f(\alpha))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow \alpha-2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha)+\alpha=0\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}\cdot f(\alpha)=2\alpha\Leftrightarrow f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

$\Leftrightarrow f(\alpha)=\sqrt{\alpha}$ (8). Η κλίση της (ε) είναι $f'(\alpha)=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $\alpha>0$ (9). Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε για κάθε $x>0$:

$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{\alpha\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2x}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right)'\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln x+c$

$\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\ln f(x)=\ln\sqrt{x}+c$, $x>0$ (10). Για $x=\alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$\ln f(\alpha)=\ln\sqrt{\alpha}+c\overset{(8)}{\Leftrightarrow}\ln\sqrt{\alpha}=\ln\sqrt{\alpha}+c\Leftrightarrow c=0$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε: $\ln f(x)=\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0 με $f(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι: $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. α)

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln|x|+\alpha x\right)=0=f(0) \quad \text{διότι}:$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln|x|\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x^{-2}}\right)\underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{D'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{-2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2\ln|x|\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(-x)}{x^{-2}}\right)\underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{D'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{-2}\right)=0$$

Άρα f συνεχής στο 0 , άρα f συνεχής στο R.

Μονάδες 3

β)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$f'(x)=\left(x^2\ln|x|+\alpha x\right)'=2x\ln|x|+x^2\frac{1}{x}+\alpha$$

$$f'(x)=2x\ln|x|+x+\alpha, \quad x\neq 0$$

Εξετάζουμε αν f παραγωγίσιμη στο α

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2\ln x+\alpha x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x+\alpha\right)=\alpha, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x^{-1}}\right)\underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{D'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\right)\lim_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2\ln(-x)+\alpha x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\ln(-x)+\alpha\right)=\alpha, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x\ln(-x)\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(-x)}{x^{-1}}\right)\underset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\overset{D'H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\right)\lim_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$$

Άρα f παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=\alpha$.

Ισχύει $x^2\ln|x|+\alpha x\geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, για κάθε $x\neq 0$, άρα η f στο $\frac{1}{\sqrt{e}}$ εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ έχει τοπικό ελάχιστο. Από Θ.Fermat

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0\Leftrightarrow 2\frac{1}{\sqrt{e}}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{e}}\right|+\frac{1}{\sqrt{e}}+\alpha=0\Leftrightarrow 2\frac{1}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{e}}+\alpha=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=0$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}2x\ln|x|+x & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

Μονάδες 5

Γ2. α)

Για $x \neq 0$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(2\ln|x|+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ απορριπτ. ή} \\ 2\ln|x|+1 \Leftrightarrow \ln|x|=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$2\ln\lvert x\rvert+1$		+	0	-		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f		↘	τ.ελ $f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↗	τ.μεγ. $f(0)$	↘	τ.ελ $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↗	

$\triangleright\ 2\ln|x|+1>0 \Leftrightarrow \ln|x|>-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |x|>e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x<-e^{-\frac{1}{2}}$ ή $x>e^{-\frac{1}{2}}$

$\triangleright\ f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left|-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right|=\dfrac{1}{e}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$

$\triangleright\ f(0)=0$

$\triangleright\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right|=\dfrac{1}{e}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$

Μονάδες 4

β)

Για $x\in(0,+\infty)$ f' παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f''(x)=\left(2x\ln x+x\right)'=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{e\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f''(x)=2\ln x+3$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	σ.κ. $f(\frac{1}{e\sqrt{e}})$	$\cup$	

$$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2\ln\left|\frac{1}{e\sqrt{e}}\right|=\frac{1}{e^3}\ln\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2e^3}$$

Μονάδες 4

γ)

Έστω ε εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$.

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=1(x-1)\Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): y=x-1$$

Επειδή η f κυρτή στο $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)$, η C_f πάνω από (ε), άρα

$f(x)\geq x-1 \quad \forall x>\frac{1}{e\sqrt{e}}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 1.

Μονάδες 5

δ)

Από Θ.Μ.Τ. για την f στα [1,1+h] και [1+h,1+2h], h>0 έχουμε :

$$\exists\ \xi_1\in(1,1+h): f'(\xi_1)=\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{f(1+h)}{h}$$

$$\exists\ \xi_2\in(1+h,1+2h): f'(\xi_2)=\frac{f(1+2h)-f(1+h)}{1+2h-1-h}=\frac{f(1+2h)-f(1+h)}{h}$$

Ισχύει

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow\frac{f(1+h)}{h}<\frac{f(1+2h)-f(1+h)}{h}\overset{h>0}{\Rightarrow}$$

$$f(1+h)<f(1+2h)-f(1+h)\Rightarrow 2f(1+h)<f(1+2h)$$

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. α)

$g(x)\geq x \Leftrightarrow g(x)-x\geq 0\,,\forall x\in[0,+\infty)$

$h(x)=g(x)-x\,,x\in[0,+\infty)$ Ισχύει $h(x)\geq 0\,,\forall x\in[0,+\infty)$ και

$h(1)=g(1)-1=1-1=0$

Άρα $h(x)\geq h(1)=0\,,\forall x\in[0,+\infty)$ δηλαδή η h έχει ελάχιστο στο $x_0=1$ εσωτερικό του $[0,+\infty)$

h παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$h'(x)=\left(g(x)-x\right)'=f(1)-1\,,x\in[0,+\infty)$

Από Θ.Fermat $h'(1)=0\Leftrightarrow f(1)-1=0\Leftrightarrow f(1)=1$

β)

Αφού f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, άρα και στο 0, ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\overset{x=0}{\Leftrightarrow} f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^{2021}}{x^{2020}\cdot\eta\mu x}=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(f(x))^{2021}}{x^{2021}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}}=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{2021}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}=0\Leftrightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(f'(0))\frac{1}{1}=0\Leftrightarrow f'(0)=0$$

f συνεχής στο [0, 1] και f παρ/μη στο (0, 1) διότι είναι παρ/μη στο $[0, +\infty)$ οπότε από Θ.Μ.Τ. έχουμε : $\exists x_0\in(0,1): f'(x_0)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1>0$

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω ότι υπάρχει $\xi\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Από Θ.Rolle για την f ΄ στο [0, ξ]: $\exists x_0\in(0,\xi): f''(x_0)=0$ **άτοπο** αφού $f''(x)\neq 0\,,\forall x\in[0,+\infty)$.

Άρα $f'(x)\neq 0\,,\forall x\in(0,+\infty)$ και επειδή f ΄ συνεχής – ως παραγωγίσιμη - έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Έστω $f'(x)<0\,,\forall x\in(0,+\infty)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ **άτοπο** αφού 0<1 και f(0)<f(1). Άρα $f'(x)>0\,,\forall x\in(0,+\infty)$

γ)

$f''(x)\neq 0$ και συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$

f' συνεχής στο $[0, x_0]$ και παρ/μή στο $(0, x_0)$ διότι f παρμή στο $[0, +\infty)$ από Θ.Μ.Τ. : $\exists\xi\in(0,x_0): f''(\xi)=\dfrac{f'(x_0)-f'(0)}{x_0-0}=\dfrac{1-0}{x_0}>0$

Άρα $f''(x)>0, \forall x\in[0,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 15(5+6+4)

Δ2. α)

f συνεχής στο R και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x \in R$, άρα f(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R κι επειδή $f(0) = e > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

$$(f'(x))^2=f''(x)f(x)-f(x)f'(x) ,\forall x\in R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x)f(x)-(f'(x))^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)} ,\forall x\in R$$

Άρα υπάρχει $c \in R$: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=ce^x ,\forall x\in R$ Για $x=0\Rightarrow\dfrac{f'(0)}{f(0)}=ce^0\Rightarrow c=1$. Άρα

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x ,\forall x\in R\Rightarrow(\ln f(x))'=(e^x)' ,\forall x\in R\Rightarrow \ln f(x)=e^x+c_1 ,\forall x\in R$$

Για $x=0\Rightarrow \ln f(0)=e^0+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Άρα $\ln f(x)=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^{e^x} ,x\in R$

β)

f συνεχής στα διαστήματα [0,1] και [1,e] και παραγωγίσιμη στα (0,1) και (1,e) με $f'(x)=\left(e^{e^x}\right)' \Leftrightarrow f'(x)=e^{e^x}e^x, x\in R$. f συνεχής στο [0, 1] και [1, e] και παρ/μη στο (0, 1) και (1, ε) διότι είναι παρ/μη στο R

από Θ.Μ.Τ. έχουμε :

$$\exists\, \xi_1\in(0,1): f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=e^e-e$$

$$\exists\, \xi_2\in(1,e): f'(\xi_2)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{e^e}-e^e}{e-1}$$

Έχουμε :

$$f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=f(1)-f(0)+(e-1)\frac{f(e)-f(1)}{e-1}+f'(1)=$$

$$=f(1)-f(0)+f(e)-f(1)+f'(1)=f'(1)-f(0)+f(e)\overset{(3)}{=}f'(1)-f'(0)+f(e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=f'(1)-f'(0)+f(e) \qquad (4)$$

f ΄ συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) ως παρ/μη στο R με

$$f''(x)=\left(e^{e^x}e^x\right)'=\left(e^{e^x+x}\right)'=e^{e^x+x}\left(e^x+1\right), x\in R$$

Από Θ.Μ.Τ. έχουμε :

$$\exists\, \xi\in(0,1): f''(\xi)=\frac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=f'(1)-f'(0)=e^{e+1}-e \qquad (5)$$

Από (4),(5): $f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=f''(\xi)+f(e)$

ή

$$f'(\xi_1)+(e-1)f'(\xi_2)+f'(1)=e^e-e+(e-1)\frac{e^{e^e}-e^e}{e-1}+e^e e=$$

$$=e^e-e+e^{e^e}-e^e+e^{e+1}=e^{e^e}+e^{e+1}-e \qquad (6)$$

f ΄ συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με

$$f''(x)=\left(e^{e^x}e^x\right)'=\left(e^{e^x+x}\right)'=e^{e^x+x}\left(e^x+1\right), x\in R$$

Από Θ.Μ.Τ. έχουμε :

$$\exists\, \xi \in (0,1) : f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = f'(1) - f'(0) = e^{e+1} - e \qquad (5)$$

Έχουμε : $f''(\xi) + f(e) = e^{e+1} - e + e^{e^{e}}$ (7)

Από (6),(7) προκύπτει το ζητούμενο.

Μονάδες 10(5+5)