ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 10-5-21

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ:ΤΕΣΣΕΡΙΣ (7)

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

Κατακόρυφη ασύμπτωτη συνάρτησης f –τοπικό ελάχιστο συνάρτησης f

Μονάδες 4

Α2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)>0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 9

Α3. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε την σωστή απάντηση

α) Από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** ισχύει η:

Α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}=1$

Β. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Γ. $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$

Δ. $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$, όπου $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0.

Ε. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in R$$

β) Το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ είναι ίσο με :

Α. $\frac{1}{2}$ Β. $\frac{1}{4}$ Γ. 0 Δ. $-\frac{\pi}{2}$ Ε. $\frac{\pi}{2}$

γ) Αν $\left(f^{-1}\circ g\right)(x+1)=3x+4$ και $g(x)=2x-3$, το f(1) είναι ίσο με :

Α. -1 Β. -2 Γ. -3 Δ. 0 Ε. 1

δ) Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f(x_0)-\alpha h}{h}=0,\alpha\in R$ τότε:

Α. $f'(x_0)=0$ Β. $f'(x_0)=-\alpha$ Γ. $f'(x_0)=\alpha$
Δ. $f'(x_0)=x_0$ Ε. $f'(x_0)=h$

Β - Ε - Γ - Γ

Μονάδες 8

Α4. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με f(x)<0, για κάθε x∈Δ, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k_1\in R$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k_2\in R$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Σ - Σ

Μονάδες 4

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

α) Καταρχάς πρέπει f(x)>0

επομένως για κάθε x στο $(0,+\infty)$ είναι xf(x)>0 και συγχρόνως

$$xf(x)\ln[f(x)]=1>0\Rightarrow \ln[f(x)]>0\Rightarrow f(x)>1$$

β) Από (1) έχουμε : $xf(x)\ln[f(x)]=1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)\ln[f(x)]=\frac{1}{x},\ x>0\quad (2)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=x\cdot\ln x$ με $x>1$

Έστω $x_1,x_2\in A_g=(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ 1<x_1<x_2\Rightarrow\\ \bullet\ 1<x_1<x_2\Rightarrow 0<\ln x_1<\ln x_2\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow} x_1\cdot\ln x_1<x_2\cdot\ln x_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in A_f=(0,+\infty)$ με $0<x_1<x_2\Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow f(x_1)\ln[f(x_1)]>f(x_2)\ln[f(x_2)]\Rightarrow g(f(x_1))>g(f(x_2))\Rightarrow$$

$$\underset{f(x_1),\,f(x_1)>1}{\overset{g\uparrow/(1,+\infty)}{\Rightarrow}} f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

2ος τρόπος

Έστω ότι η f όχι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, τότε

υπάρχουν $x_1,x_2\in A_f=(0,+\infty)$ με $0<x_1<x_2$ και $f(x_1)\le f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\quad 1<f(x_1)\le f(x_2)\\ \bullet\quad 0<\ln(f(x_1))\le \ln(f(x_1))\end{array}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow} f(x_1)\ln[f(x_1)]\le f(x_2)\ln[f(x_2)]\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{x_1}\le\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1\ge x_2\quad \text{Άτοπο}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) $f(x)>1$ (1) και $xf(x)\ln[f(x)]=1$ (2)

από (2) για x=1 έχω $f(1)=\frac{1}{\ln[f(1)]}$ από (2) θέτοντας όπου x το f(x) έχω

$$\ln[f(f(x))]=\frac{1}{f(x)f(f(x))}$$

και από (1) με δεδομένο ότι f γνησίως φθίνουσα :

$$f(x)>1 \Rightarrow f(f(x))<f(1) \Rightarrow \ln[f(f(x))]<\ln[f(1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)f(f(x))}<\frac{1}{f(1)} \Rightarrow f(x)f(f(x))>f(1)$$

δ) στην (2) για x= x_1 έχω : $x_1 f(x_1)\ln[f(x_1)]=1 \Rightarrow x_1\cdot e\cdot 1=1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{e}$

στην (2) για x= x_2 έχω: $x_2 f(x_2)\ln[f(x_2)]=1 \Rightarrow x_2\cdot e^2\cdot 2=1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2e^2}$

Β2.

$$f^2(x)+g^2(x)+5 \le 2f(x)+4g(x)+\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$(f(x)-1)^2+(g(x)-2)^2 \le \left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

Οπότε:

$$(f(x)-1)^2 \le (f(x)-1)^2+(g(x)-2)^2 \le \left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \Rightarrow |f(x)-1| \le \sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} \Leftrightarrow$$

$$1-\sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} \le f(x) \le 1+\sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}$$

Και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1-\sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\sqrt{\left|\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}\right)=1$

Από Κ.Π. υπάρχει $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=1$ όμοια $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)=2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $f''(x_1)=f''(x_2)$ κι έστω $x_1<x_2$.

Από Θ.Rolle για την f ΄΄ (απαιτείται πλήρης διατύπωση) στο $[x_1, x_2]$,υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$ **Άτοπο.**

Άρα f ΄΄ «1-1» και αφού f ΄΄ συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα f ΄΄ γνησίως μονότονη (απαραίτητη η απόδειξη με το Θ.Ε.Τ.)

Γ2.

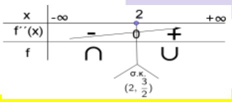
Οι συναρτήσεις f (x) , f (4 – x) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R (η f(4-x) παρ/μη ως σύνθεση παραγωγίσιμων), άρα :

$\left(f(x) + f(4-x)\right)' = 3' \Leftrightarrow f'(x) - f'(4-x) = 0$, $x \in R$ και

$\left(f'(x) - f'(4-x)\right)' = 0' \Leftrightarrow f''(x) + f''(4-x) = 0$, $x \in R$

Για x=2: $f''(2) + f''(4-2) = 0 \Leftrightarrow f''(2) = 0$ κι επειδή f ΄΄ γνησίως μονότονη επομένως «1-1» , άρα 2 μοναδική ρίζα της $f''(x) = 0$.

Επειδή f ΄΄ γνησίως μονότονη και $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα $f^{(3)}(x)$ έχει σταθερό πρόσημο στο R και αφού $f^{(3)}(2) > 0$, άρα $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα f ΄΄ γνησίως αύξουσα στο R.



f στρέφει κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2]$

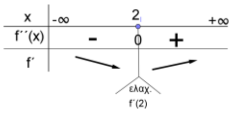
f στρέφει κοίλα άνω στο $[2, +\infty)$

Σημείο καμπής (2,f(2))

Για x=2 στην σχέση $f(2) + f(4-2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2}$

Γ3.

Από Δ2. x=2 προφανής ρίζα της εξίσωσης 2f (x) = 3



Για κάθε $x \in R, f'(x) \geq f'(2) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα, άρα η εξίσωση 2f (x) = 3 έχει μοναδική ρίζα την x=2.

Γ4.

Έστω $M(x_0, 0)$ το σημείο στο οποίο η Cg τέμνει τον xx΄. Ισχύει

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$ (1) .

Η g παρ/μη στο R ως πηλίκο παρ/μων με

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},\ x\in R.$$

Για $x=x_0: g'(x_0)=\frac{(f'(x_0))^2-f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\overset{(1)}{=}\frac{(f'(x_0))^2}{(f'(x_0))^2}=1$

Αν ε εφαπτομένη της Cg στο Μ, τότε $\lambda_\varepsilon=g'(x_0)=1\Leftrightarrow (\widehat{\varepsilon, xx'})=45^0$

Γ5.

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται :

$2f(x+1)=f(x)+f(x+2)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1) \quad (1)$

Από Θ.Μ.Τ. για την f στα [x,x+1], [x+1,x+2] με $x\geq 2$(απαιτείται πλήρης διατύπωση) , έχουμε :

υπάρχει $\xi_1\in(x,x+1)$ ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$

υπάρχει $\xi_2\in(x+1,x+2)$ ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(x+2)-f(x+1)}{x+2-x-1}=f(x+2)-f(x+1)$

Από (1) έχουμε : $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ κι επειδή f ΄ γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ άρα και «1-1» άρα $\xi_1=\xi_2$ **Άτοπο** αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση 2f (x + 1) = f (x) + f (x + 2) είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $f(\rho)=0\ (2)$. Για $x=\rho$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε: $f(\rho)=0-\frac{\rho^2+1}{\rho}\overset{(2)}{\Rightarrow}\rho^2+1=0\Rightarrow\rho^2=-1$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Δ2.

Για $x=y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε: $f(1)=f^2(1)-2\Leftrightarrow f^2(1)-f(1)-2=0$

$\Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f(1)=-1$. Το γεγονός ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ μας δίνει ότι f(x)>0 κοντά στο $+\infty$ άρα υπάρχει διάστημα Δ= (κ, $+\infty$) ώστε f(x)>0 στο Δ . Αν $x_0\in \Delta$ τότε $f(x_0)>0$. Εξάλλου η f, ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε $f(1)=2$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $y=1$ από τη σχέση (1) έχουμε: $f(x)=2f(x)-\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{x}$

Δ3.

Είναι: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = e^1 = e$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] \overset{+\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = 1$$

Δ4.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$x\left(x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)=x-1 \Leftrightarrow x+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=1-\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x)=1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}$ (3). Όμως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επίσης για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\leq 2$. Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν $\begin{cases} f(x)=2 \\ 1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$