<u>ΙΔΙΩΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ & ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ</u>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 04/06/2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.76 θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.155 Ορισμός

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.216

Α4.

α) Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

Θέμα Β

Β1.

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}{\sqrt{x}}=\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ \ x\geq 1$$

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}}\ \ x\geq 1$$

Θα πρέπει $x\geq 1$ και $h(x)\neq 0$

$h(x)=0\Rightarrow x=1$

Άρα $D_f=(1,+\infty)$ και $f(x)=\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}}=\frac{x+1}{x-1}$, $x>1$

D_r=[1,+∞) και$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = x - \frac{1}{x}\ x \geq 1$

B2.

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

f'(x)<0 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$επομένως 1-1 και αντιστρέψιμη

f συνεχής στο D_f και $f \downarrow$άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)\right) = (1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) \cdot \frac{1}{x-1}$$
$$= +\infty\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} x - 1 = 0 \\ x - 1 > 0\ \kappa o\nu\tau\acute{\alpha}\ \sigma\tau o\ 1\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\alpha\ \delta\varepsilon\xi\iota\acute{\alpha} \end{cases}$$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$(1)

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x + 1 = xy - y \Leftrightarrow x - xy = 1 - y \Leftrightarrow x(y-1) = y + 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow^{(1)} = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}(1) \quad , y > 1$$
$$E\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$$

- $D_f = D_{f^{-1}}$
- $f(x) = f^{-1}(x)$

Άρα $f = f^{-1}$

Β3.

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [r(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$

Η r(x) είναι συνεχής στο D_r=[1,+∞) ως πράξεις συνεχών επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτές.

Β4.

Θα πρέπει$x \in D_f$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad καθώς x > 1$$

Θέμα Γ

Γ1.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [0, +∞) άρα είναι συνεχής και στο x_0 =2.

$$\lim_{x\to2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to2^+}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = \lim_{x\to2^+}(-x^2 + 4x - 3 + \lambda) \Leftrightarrow e^{\lambda}$$
$$= \lambda + 1$$

Προφανής λύση η λ=0 που είναι μοναδική αφού στην βασική ανισοτική σχέση

$e^{\lambda} \geq \lambda + 1$ η ισότητα ισχύει μόνο στο 0

Γ2.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [0, +∞)

Για 0<x<2 f ΄(x)=-2 <0 και f συνεχής στο 0 άρα $f \downarrow$ στο [0,2)

Για x>2 $f\,'(x) = -2x + 4 < 0 \;\Leftrightarrow x > 2$ άρα$f \downarrow στο\ (2, +\infty)$

Επιπλέον f συνεχής στο στο x_0 =2 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, +∞)

$\forall x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \; και \; f \; γνησίως \; φθίνουσα \; οπότε \; f(x) \leq f(0)$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$ στην θέση x_0=0

Γ3.

i. η f είναι συνεχής στο [0,3]

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο 2.

Έχουμε: $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} -(x-2) = 0$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2. Οπότε δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο [0, 3]

ii.

Είναι $\lambda_{ΔΕ}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-5}{3} = -\frac{5}{3}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει ξ∈(0,3) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

Για 0<x<2 f'(x)=-2 άρα δεν υπάρχει ξ στο (0,2) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

Για x>2

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} > 2$$

$$Άρα \; \xi = \frac{17}{6}$$

Γ4.

$$εφω = \frac{OM}{OA} = \frac{y}{2}$$

Ορίζουμε $y = y(t), t \geq 0$

Έχουμε y'(t)=0,5 μον/sec $\forall t \geq 0$

Άρα $\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου Μ σημείο της C_f $y(t_0)=1$ και $\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \frac{1}{2}$

Παραγωγίζουμε την $\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y\prime(t)}{2} \Leftrightarrow \left(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)\omega'(t) = \frac{y\prime(t)}{2}$

Για $t=t_0$ έχουμε $\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \omega'(t_o) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} rad/sec$

Θέμα Δ

Δ1.

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{lnx+ax}{x}$

f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-(lnx+ax)}{x^2} = \frac{1+ax-lnx-ax}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - lnx > 0 \Leftrightarrow 1 > lnx \Leftrightarrow lne > lnx \Leftrightarrow 0 < x < e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - lnx < 0 \Leftrightarrow 1 < lnx \Leftrightarrow lne < lnx \Leftrightarrow x > e$

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,e]άρα

f((0,e])=(-∞,$\frac{1+ae}{e}$] διότι

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{lnx+ax}{x} = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{lnx}{x} + a\right) = -\infty$διότι $\lim_{x\to0^+} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to0^+} \left(lnx \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\infty$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞) άρα

f([e,+∞) =(0,$\frac{1+ae}{e}$] διότι

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{lnx}{x} + a\right) = a$ διότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} \overset{\infty/\infty,DH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$f((0,+\infty))=(-\infty,\frac{1+ae}{e}]\cup(0,\frac{1+ae}{e}]=(-\infty,\frac{1+ae}{e}]$ όμως δίνεται ότι

$f((0,+\infty))=(-\infty,1+\frac{1}{e}]$ άρα $\frac{1+ae}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow \alpha=1$

Δ2. f συνεχής στο $[\frac{1}{2},1]$ ως πράξεις συνεχών

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-ln4<0$, $f(1)=1>0$ άρα $f(\frac{1}{2})f(1)<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ ώστε $f(x_0)=0$

f γνησίως φθίνουσα στο (0,e] οπότε και 1-1 άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα στο (0,e] οπότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (0,e] και $f([e,+\infty)=(0,\frac{1+ae}{e}]$ άρα f(x)>0 για κάθε x∈ $[e,+\infty)$

Τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_0 που μάλιστα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ3.

i. $f(4)=1+\frac{ln4}{4}=1+\frac{2ln2}{4}=1+\frac{ln2}{2}=f(2)$

για $x\in(0,e]$ $έχω f(x)=f(4)\leftrightarrow f(x)=f(2)\leftrightarrow x=2$ διότι f γν. αύξουσα άρα 1-1 στο $(0,e]$

για $x\in[e,+\infty)$ $έχω f(x)=f(4)\leftrightarrow x=4$ διότι f γν. φθίνουσα άρα 1-1 στο $[e,+\infty)$

Τελικά η εξίσωση f(x)=f(4) έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1=2$,$x_2=4$

ii.

$$2^x\leq x^2\Leftrightarrow xln2\leq 2lnx\Leftrightarrow \frac{ln2}{2}\leq\frac{lnx}{x}\Leftrightarrow 1+\frac{ln2}{2}\leq 1+\frac{lnx}{x}\Leftrightarrow f(2)\leq f(x)(1)$$

Για $x\in(0,e]$, $(1)\leftrightarrow 2\leq x$ διότι f ↑ στο$(0,e]$ οπότε $x\in[2,e]$

Για $x\in[e,+\infty)$, $f(2)\leq f(x)\Leftrightarrow f(4)\leq f(x)\Leftrightarrow 4\geq x$ $οπότε$ $e\leq x\leq 4$

Τελικά $(1)\Leftrightarrow x\in[2,4]$

Δ4.

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$$

$$E = \int_{-ln2}^{0} |f(e^x)\frac{1-x}{e^x}|dx$$

Για κάθε x∈ $[-\ln 2, 0]$ είναι 1-x≥ 0 , e^x άρα

$$E = \int_{-ln2}^{0} |f(e^x)|\frac{1-x}{e^x}dx$$

Θέτω u=e^x , x=lnu και dx=$\frac{1}{u}du$ Για x=-ln2→ $u = \frac{1}{2}$ για x=0→ u =1

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u)|\frac{1-lnu}{u^2}du$$

Η Εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_0 και είναι συνεχής ώς πράξεις συνεχών

Για κάθε x<x_0 είναι f(x)≠ 0 και f($\frac{1}{2}$) < 0 άρα f(x)<0 όμοια

Για x>x_0 είναι f(x)≠ 0 και f(1) > 0 άρα f(x)>0

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u)|\frac{1-lnu}{u^2}du + \int_{x_0}^{1} |f(u)|\frac{1-lnu}{u^2}du$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du + \int_{x_0}^{1} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du =$$

$$= \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du + \int_{x_0}^{1} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du$$

Το $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(u)f'(u)du = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}(f^2(u))'du$

$=\frac{1}{2}[f^2(u)]_{x_0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}f^2(\frac{1}{2})$ όμοια

$$\int_{x_0}^{1} f(u)\frac{1-lnu}{u^2}du = \frac{1}{2}f^2(1)$$

Άρα Ε$=\frac{1}{2}f^2(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f^2(1)=\frac{1}{2}\ln^2 4 - \ln 4 + 1$ τ.μ.