

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ	Β' Γυμνασίου	ΒΑΘΜΟΣ Α ΘΕΜΑΤΟΣ	ΒΑΘΜΟΣ Β ΘΕΜΑΤΟΣ	ΒΑΘΜΟΣ Γ ΘΕΜΑΤΟΣ	ΒΑΘΜΟΣ Δ ΘΕΜΑΤΟΣ
Ύλη Διαγωνίσματος	Εξισώσεις, Προβλήματα Εξισώσεων, Ανισώσεις, Εμβαδά, Πυθαγόρειο Θεώρημα				
		ΤΕΛΙΚΟΣ ΒΑΘΜΟΣ :			

Θέμα Α

A.1 Τι ονομάζουμε μία αριθμητική παράσταση;

A.2 Τι ονομάζουμε μία αλγεβρική παράσταση;

A.3 Να γράψετε τον τύπο της επιμεριστικής ιδιότητας ως προς την πρόσθεση και ως προς την αφαίρεση.

Λύση

A.1 Μία παράσταση, που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται αριθμητική παράσταση.

A.2 Μία παράσταση, που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές, ονομάζεται αλγεβρική παράσταση.

A.3 Επιμεριστική ιδιότητα με πρόσθεση : $a \cdot (\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$
 Επιμεριστική ιδιότητα με αφαίρεση : $a \cdot (\beta - \gamma) = a\beta - a\gamma$

Θέμα Β

B.1 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω Σωστά ή Λάθος.

Λύση

B.1 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω Σωστά ή Λάθος.

	Σωστό	Λάθος
Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να αφαιρέσω έναν αριθμό γ και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a - \gamma = \beta - \gamma$	X	
Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να πολλαπλασιάσω έναν αριθμό γ (με $\gamma \neq 0$) και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$	X	
Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να προσθέσω έναν αριθμό γ και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a + \gamma = \beta + \gamma$	X	
Αν ισχύει ότι $a = \beta$, τότε μπορώ να διαιρέσω έναν αριθμό γ (με $\gamma \neq 0$) και στα δύο μέλη χωρίς να επηρεάσω την ισότητα. Δηλαδή $a : \gamma = \beta : \gamma$	X	

B.2 Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω Σωστά ή Λάθος.

	Σωστό	Λάθος
Η εξίσωση $2x = 2$ έχει λύση την $x=1$	X	
Η εξίσωση $2x - 2 = 2$ έχει λύση την $x=3$		X
Η εξίσωση $2x - 5x = 2$ έχει λύση την $x=1$		X
Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αδύνατη		X
Μία από τις λύσεις της εξίσωσης $0x = 15$ είναι η $x=15$		X
Η εξίσωση $5x = 0$ έχει λύση την $x=0$	X	

B.3 Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι αδύνατη;

Λύση

Μία εξίσωση είναι αδύνατη, όταν είναι μορφής $0x = \alpha$, γιατί για κάθε τιμή της μεταβλητής x το πρώτο μέλος ισούται πάντα με 0, οπότε δεν μπορεί να είναι ποτέ ίση με α . Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση.

B.4 Πότε λέμε ότι μία εξίσωση είναι ταυτότητα;

Λύση

Μία εξίσωση είναι ταυτότητα, όταν είναι της μορφής $0x = 0$, δηλαδή κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.

Θέμα Γ

Γ.1 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i) } 4(2x+3) - (3x-5) = 3(x-3) + 24 \quad \text{ii) } \frac{x+1}{2} - \frac{2x-4}{6} = \frac{2x-1}{3} \quad \text{iii) } \frac{2x+3}{3} - \frac{3x-5}{12} = \frac{x-3}{4} + 4$$

Μονάδες 15

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) } & 4(2x+3) - (3x-5) = 3(x-3) + 24 \\ & \text{ή } 8x+12-3x+5 = 3x-9+24 \\ & \text{ή } 8x-3x-3x = -5-12-9+24 \\ & \text{ή } 2x = -26+24 \\ & \text{ή } 2x = -2 \\ & \text{ή } x = \frac{-2}{2} \\ & \text{ή } x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \frac{x+1}{2} - \frac{2x-4}{6} = \frac{2x-1}{3}$$

ΕΚΠ(2,6,3)=6, άρα πολλαπλασιάζω τα πάντα με το 6 για να φύγουν οι παρονομαστές

$$\text{ή } 6 \cdot \frac{x+1}{2} - 6 \cdot \frac{2x-4}{6} = 6 \cdot \frac{2x-1}{3}$$

$$\text{ή } 3 \cdot (x+1) - (2x-4) = 2(2x-1)$$

$$\text{ή } 3x+3-2x+4=4x-2$$

$$\text{ή } 3x-2x-4x=-2-4-3$$

$$\text{ή } 3x-6x=-9$$

$$\text{ή } -3x=-9$$

$$\text{ή } x = \frac{-9}{-3}$$

$$\text{ή } x=3$$

$$\text{iii) } \frac{2x+3}{3} - \frac{3x-5}{12} = \frac{x-3}{4} + 4$$

ΕΚΠ(3,12,4)=12, άρα πολλαπλασιάζω τα πάντα με το 12 για να φύγουν οι παρονομαστές

$$12 \cdot \frac{2x+3}{3} - 12 \cdot \frac{3x-5}{12} = 12 \cdot \frac{x-3}{4} + 12 \cdot 4$$

$$\text{ή } 4(2x+3)-(3x-5)=3(x-3)+48$$

$$\text{ή } 8x+12-3x+5=3x-9+48$$

$$\text{ή } 8x-3x-3x=-5-12-9+48$$

$$\text{ή } 8x-6x=-26+48$$

$$\text{ή } 2x=+22$$

$$\text{ή } x = \frac{22}{2}$$

$$\text{ή } x=11$$

Γ.2 Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$\alpha) \sqrt{5+\sqrt{116+\sqrt{22+\sqrt{9}}}} \quad \beta) \sqrt{6+\sqrt{9}} - \sqrt{9} + \sqrt{16} \quad \gamma) \sqrt{\sqrt{\sqrt{248+\sqrt{54+\sqrt{100}}}}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \sqrt{5+\sqrt{116+\sqrt{22+\sqrt{9}}}} &= \\ &= \sqrt{5+\sqrt{116+\sqrt{22+3}}} \\ &= \sqrt{5+\sqrt{116+\sqrt{25}}} \\ &= \sqrt{5+\sqrt{116+5}} \\ &= \sqrt{5+\sqrt{121}} \\ &= \sqrt{5+11} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \sqrt{6+\sqrt{9}} - \sqrt{9} + \sqrt{16} &= \\
 &= \sqrt{6+3} - 3 + 4 \\
 &= \sqrt{9} + 1 \\
 &= 3 + 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma) \sqrt{\sqrt{\sqrt{248+\sqrt{54+\sqrt{100}}}}} &= \\
 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{248+\sqrt{54+10}}}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{248+\sqrt{64}}}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{248+8}}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} \\
 &= \sqrt{\sqrt{16}} \\
 &= \sqrt{4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Γ.3 Σε μία οικογένεια η μητέρα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο της. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια από του γιου. Να βρείτε πόσο χρονών είναι η μητέρα και ο γιος.

Λύση

Έστω ότι η ηλικία του γιου είναι x .

Άρα της μητέρας είναι $3x$

Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 3x + 10 &= 2(x + 10) \\
 \text{ή } 3x + 10 &= 2x + 20 \\
 \text{ή } 3x + 10 &= 2x + 20 \\
 \text{ή } x &= 20 - 10 \\
 \text{ή } x &= 10
 \end{aligned}$$

Άρα η μητέρα είναι 30 χρονών και ο γιος 10

Μετά από 10 χρόνια η μητέρα θα είναι 40 και ο γιος 20.

Γ.4 Σ' ένα ξενοδοχείο υπάρχουν 50 δωμάτια, από τα οποία μερικά είναι τρίκλινα και μερικά δίκλινα. Όταν είναι πλήρες έχει 120 άτομα. Να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα.

Λύση

Έστω x τα δίκλινα δωμάτια.

Άρα τα τρίκλινα είναι $50-x$

Οπότε έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}2x + 3(50 - x) &= 120 \\ \text{ή } 2x + 150 - 3x &= 120 \\ \text{ή } 2x - 3x &= 120 - 150 \\ \text{ή } -x &= -30 \\ \text{ή } x &= 30\end{aligned}$$

Άρα τα δίκλινα είναι 30 και τα τρίκλινα είναι 20.

Ελέγχουμε το αποτέλεσμα.

Δίκλινα : $30 \cdot 2$ άτομα = 60 άτομα και Τρίκλινα : $20 \cdot 3$ άτομα = 60 άτομα. Άρα σύνολο 120 άτομα.

Γ.5 Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες μαζί;

Λύση

Έστω ότι και οι δύο μαζί γεμίζουν την δεξαμενή σε x λεπτά.

Σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $\frac{1}{10}$ και σε x λεπτά τα $\frac{x}{10}$ της δεξαμενής.

Όμως η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $\frac{x}{15}$ της δεξαμενής.

Αφού και οι δύο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}\frac{x}{10} + \frac{x}{15} &= 1 \\ \text{ή } 30 \cdot \frac{x}{10} + 30 \cdot \frac{x}{15} &= 30 \cdot 1 \\ \text{ή } 3x + 2x &= 30 \\ \text{ή } 5x &= 30 \\ \text{ή } x &= \frac{30}{5} \\ \text{ή } x &= 6.\end{aligned}$$

Άρα και οι δύο βρύσες γεμίζουν τη δεξαμενή σε 6 λεπτά.

Θέμα Δ

Δ.1 Να γράψετε τους τύπους για το εμβαδόν του τριγώνου, τετραγώνου, τραπεζίου και ορθογωνίου.

Λύση

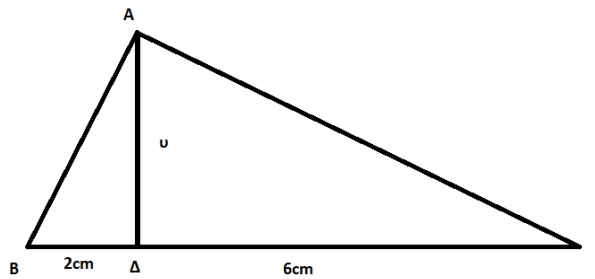
Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος της βάσης αυτής.

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου, πλευράς a , ισούται με a^2 .

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημισθροίσματος των βάσεων του με το ύψος του.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου, με πλευρές α , β , ισούται με $\alpha \cdot \beta$.

Δ.2 Στο παρακάτω σχήμα το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 16cm^2 . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.



Λύση

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ξέρουμε ότι το εμβαδόν είναι 16cm^2 .

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon = 16$$

$$\text{Άρα } 16 = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \upsilon$$

$$16 = \frac{1}{2} 8 \cdot \upsilon$$

$$4\upsilon = 16$$

$$\upsilon = 4\text{cm}$$

Και θέλουμε και το εμβαδόν του $AB\Delta$ τριγώνου

$$\text{Άρα } (AB\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon$$

$$\text{Άρα } (AB\Delta) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\text{cm}^2$$