<u>ΙΔΙΩΤΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ & ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ</u>

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3/6/2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1.

Θεωρία βιβλίο οργανισμού σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

Α2.

Θεωρία βιβλίο οργανισμού σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και

- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Α3.
Θεωρία βιβλίο οργανισμού σελίδα 185

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**(1) ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

Α4.

- **i.** Λάθος
- **ii.** Σωστό
- **iii.** Σωστό
- **iv.** Σωστό
- **v.** Λάθος

Θέμα Β

Β1

Θα βρω το πεδίο ορισμού της h

$D_h=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \leftrightarrow x\in[2,+\infty)$

$g(x)\in D_f \leftrightarrow \sqrt{x-2}+1>1 \leftrightarrow \sqrt{x-2}>0 \leftrightarrow x>2$

Τελικά $D_h=(2,+\infty)$

και

$h(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)=2\ln(\sqrt{x-2})=\ln(x-2)$

Β2

Για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)\,\mu\varepsilon\, x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\Rightarrow\ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

άρα h γν . αύξουσα τότε και 1-1 επομένως h αντιστρέψιμη

Έστω y=ln(x-2) $\leftrightarrow x=e^y+2\ \kappa\alpha\iota\ x>2 \leftrightarrow e^y+2>2 \leftrightarrow e^y>0$ ισχύει για κάθε $y\in R$

Τελικά h(x)=$e^x+2,\, D_h=(2,+\infty)$

Β3

Το $D_h=(2,+\infty)$ οπότε

Για το $\lim\limits_{\chi\to 2} h(x)=\lim\limits_{\chi\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{\chi\to 2^+}\ln(x-2)$ θέτω u=x-2 όταν $x\to 2^+$ τότε $u\to 0^+$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 2} h(x)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}\ DH}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x-1}=2$$

Τελικά $\lim\limits_{\chi\to 2}\left(h(x)\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=-\infty$

Θέμα Γ

$$f(x)=\frac{kx^3+\mu x}{x^2+1}\quad,\quad D_f=\mathbb{R}$$

Γ1.

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ *όπου* $l\in\mathbb{R}$

Έστω $k\neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^3+\mu x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} kx=\begin{cases}+\infty\ ,\ k>0\\ -\infty\ ,\ k<0\end{cases}$$ **ΑΤΟΠΟ**

Για k= 0 έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Επομένως k=0.

Άρα $f(x)=\frac{\mu x}{x^2+1}$.

$$f'(x)=\frac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$$

Η ευθεία y=x εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων .

Άρα f’(0)=1

$$f'(0)=1\Leftrightarrow\frac{\mu}{(1)^2}=1\Leftrightarrow\mu=1$$

Για μ=1 προκύπτει ότι η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) είναι η y=x.

Άρα $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ και $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Γ2.

i)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\ \ ή\ \ x=-1$$

x	$-\infty$	-1 1	$+\infty$
f’(x)	-	+	-
f	↓	↑	↓

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο ($-\infty$, -1] και στο [1 , $+\infty$)

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1 , 1]

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=-1 την τιμή $f(-1)=-\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1 την τιμή $f(1)=\frac{1}{2}$

ii)
$A_1 = (-\infty, -1]$
$A_2 = [-1, 1]$
$A_3 = [1, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 και συνεχής άρα
$f(A_1)=f((-\infty, -1]) = [f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)) = [-\frac{1}{2}, 0)$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 και συνεχής άρα
$f(A_2)=f([-1, 1]) = [f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_3 και συνεχής άρα
$f(A_3)=f([1, +\infty)) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0, \frac{1}{2}]$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Άρα $f(A) = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$f(x)\leq\frac{1}{2}$ η ισότητα ισχύει μόνο για x=1 (προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω)
$\frac{1}{2}+\alpha^2\geq\frac{1}{2}$ η ισότητα ισχύει μόνο για α=0.
Άμεσα συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$ έχει μια ΜΟΝΑΔΙΚΗ λύση για α=0 .
Αν $\alpha\neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση .

Γ3.

$$I_\nu=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$$
$$I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$$
$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}+\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{xx^{2\nu}+x^3x^{2\nu}}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{xx^{2\nu}(x^2+1)}{x^2+1}\right)dx\Rightarrow$$
$$I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{xx^{2\nu}(x^2+1)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1=\frac{1}{2\nu+2}$$

$$I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_1^0=\frac{1}{2}\ln 2$$

Για ν = 0 έχουμε

$$I_0+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1-\ln 2}{2}$$

Για ν = 1 έχουμε

$$I_1+I_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-\frac{1-\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2-1}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1.

Ορίζω h(x)=g(x)+x στο [-1,0]

Η h είναι συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

h(-1)h(0)<0 διότι

h(-1)=g(-1)-1<0 και h(0)=g(0)>0

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in$ (-1,0) ώστε h(x_1)=0 δηλαδή g(x_1)+x_1=0

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$h'(x)=g'(x)+1\neq 0.$

Επίσης $h'(x)$είναι συνεχής στο [-1,0] άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο επομένως η h είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 και το x_1

είναι μοναδικό.

Δ2.

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}x(g(x)+x)\overset{g\ \text{συνεχής στο}\ 0}{=}0\cdot(g(0)+0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu}x-k\right]=2+1-k=3-k$$

οπότε 3-κ=0 δηλαδή κ=3

Δ3.

i)Στο $(0,\frac{\pi}{2})$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

άρα f:γνησίως αύξουσα στο $A_1=[0,\frac{\pi}{2})$ άρα για x≥ 0 *έχουμε* $f(x)\geq f(0)$ *δηλαδή*

f(x)≥ 0

ii)Αφού f:γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$ τότε $f(A_1)=[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x))=[0,\ +\infty)$

καθώς $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=0+\infty-0=+\infty$

$\frac{\pi}{3}\in f(A_1)$, f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$ άρα υπάρχει $x_2\in$ *στο* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *ώστε* $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$

και επειδή f:γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$ το x_2 είναι μοναδικό

Δ4.

i)Για την h(x)=g(x)+x εφαρμόζω ΘΜΤ στο $[x_1,0]$

Έχουμε η h είναι συνεχής στο $[x_1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1,0)$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈ $(x_1,0)$ $\text{ώστε}\ \ h'(\xi)=\dfrac{h(0)-h(x_1)}{0-x_1}=\dfrac{g(0)}{-x_1}>0$

άρα εφόσον η h’ διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε $h'(x)>0\ \text{στο}\,(x_1,0)\ \text{και}$

επειδή είναι συνεχής τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,0]$.

Άρα για x≥ x_1 έχω

h(x)≥$h(x_1)$ $\ \text{δηλαδή}\ \ h(x)\geq 0\ \ \text{οπότε}\ \ x^2 h(x)\geq 0\ \ \text{δηλαδή}\ \ f(x)\geq 0\ \ \text{στο}\ \ [x_1,0]$

ii)Ε(Ω)= $\displaystyle\int_{x_1}^{f(x_1)} |f(x)|dx=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx\ \ \text{διότι}\ \ f(x)\geq 0\ \ \text{για}\ \ x\geq x_1$

Επίσης $\displaystyle\int_{x_1}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\,\eta\mu\,x+\varepsilon\varphi\,x-3\,x\,dx=\left[-2\,\sigma\upsilon\nu\,x-\ln|\varepsilon\varphi x|-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=$-1-ln$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi^2}{6}+2=1+\ln 2-\dfrac{\pi^2}{6}$

άρα $3\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=3+3\ln 2-\frac{\pi^2}{2}$

$\displaystyle\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx=[x^3 g(x)]_{x_1}^{0}-3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(x^2 g(x)+x^3)dx=x_1^4-3\int_{x_1}^{0} f(x)dx+3\int_{x_1}^{0} x^3 dx=$

$x_1{}^4-3-3\ln 2+\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{3x_1{}^4}{4}=\dfrac{x_1{}^4}{4}-3\ln 2-3+\dfrac{\pi^2}{2}$