Πράξεις - Διάταξη πραγματικών αριθμών

Άσκηση 1.

Δίνεται η παράσταση

$$A = \left[(x^2y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4\right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}.$$

(α) Να δειχθεί ότι $A = x^9 \cdot y^9$.

(β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης για $x = 2013$ και $y = \frac{1}{2013}$.

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left[(x^2y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4\right] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3} \\ &= \left[\frac{1}{(x^2y^3)^2} \cdot (xy^3)^4\right] : \left(\frac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 \\ &= \frac{x^4y^{12}}{x^4y^6} : \frac{1}{y^3x^9} \\ &= y^6 : \frac{1}{y^3x^9} \\ &= y^6 \cdot \left(y^3x^9\right) = x^9 \cdot y^9. \end{aligned}$$

(β) Για $x = 2013$ και $y = \frac{1}{2013}$ έχουμε ότι

$$A = 2013^9 \cdot \left(\frac{1}{2013}\right)^9 = 2013^9 \cdot \frac{1}{2013^9} = 1.$$

Άσκηση 2.

(α) Να δειχθεί ότι $\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1$.

(β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $(1,3265)^2 - 0,3265 \cdot 2,3265$.

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1) &= \alpha^2-\left(\alpha^2-1\right) \\ &= \alpha^2-\alpha^2+1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(β) Για $\alpha = 1,3265,$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & 1,3265^2-(1,3265-1)(1,3265+1)=1 \\ \Leftrightarrow\quad & (1,3265)^2-0,3265\cdot 2,3265=1. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Να δειχθεί ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

Λύση. Έστω $\nu,\ \nu+1$ δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Θα δείξουμε ότι

$$(\nu+1)^2-\nu^2=\nu+(\nu-1).$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & (\nu+1)^2-\nu^2=\nu+(\nu-1) \\ \Leftrightarrow\quad & \nu^2+2\nu+1-\nu^2=\nu+\nu-1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\nu+1=2\nu+1, \qquad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

(α) $A=\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$

(β) $B=\dfrac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}$

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \\ &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 1} \\ &= \alpha - 1. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B &= \frac{(\alpha^2 - \alpha) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha(\alpha - 1) + 2\,(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} \\ &= \frac{(\alpha - 1)\,(\alpha + 2)}{(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Να δειχθεί ότι

$$\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) = 1$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) &= \left[\frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x - y)(x + y)}\right] : \left(\frac{x^2 - y(x - y)}{x - y}\right) \\ &= \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}\right) : \left(\frac{x^2 - yx + y^2}{x - y}\right) \\ &= \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x^2 - yx + y^2} = 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

(α) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$.

(β) Για κάθε $\alpha > 0$, ισχύει ότι $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$.

(γ) Για κάθε $\alpha < 0$, ισχύει ότι $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2$.

(δ) Αν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση. (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (\alpha-\beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha+\frac{1}{\alpha} \geq 2 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \geq 2 \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha^2+1 \geq 2\alpha \quad (\text{αφού } \alpha>0) \\ \Leftrightarrow\quad & (\alpha-1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\alpha^2+1}{\alpha} \leq -2 \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha^2+1 \geq -2\alpha \quad (\text{αφού } \alpha<0) \\ \Leftrightarrow\quad & (\alpha+1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

(δ) **Ευθύ.** Υποθέτουμε ότι $\alpha<\beta$ και θα αποδείξουμε ότι $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$. Αφού οι α, β είναι ομόσημοι, έχουμε ότι $\alpha\beta>0$. Διαιρώντας λοιπόν το κάθε μέλος της $\alpha<\beta$ με $\alpha\beta$, έχουμε ότι

$$\alpha<\beta \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\alpha\beta}<\frac{\beta}{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta},$$

που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφο. Υποθέτουμε τώρα ότι $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$ και θα δείξουμε ότι $\alpha<\beta$. Αφού $\alpha\beta>0$, πολλαπλασιάζουμε το κάθε μέλος της $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$ με $\alpha\beta$ χωρίς να αλλάξει η φορά, κι έτσι έχουμε ότι

$$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\beta>\frac{1}{\beta}\cdot\alpha\beta \;\Rightarrow\; \alpha<\beta,$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 7.

Να δειχθεί ότι για κάθε α, $\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geq 0.$$

Λύση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\alpha\beta \geq 0$, τότε $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.
- Αν $\alpha\beta < 0$, τότε

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha + \beta)^2 + (-\alpha\beta) \geq 0, \end{aligned}$$

  που ισχύει, ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών ($\alpha\beta < 0 \Rightarrow -\alpha\beta > 0$).

Άσκηση 8.

Αν $\alpha > 1 > \beta$, να δειχθεί ότι

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha + \beta > 1 + \alpha\beta \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha - 1) + \beta(1 - \alpha) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha - 1) - \beta(\alpha - 1) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha - 1)(1 - \beta) > 0, \end{aligned}$$

που ισχύει διότι από υπόθεση

- $\alpha > 1 \;\Rightarrow\; (\alpha - 1) > 0$ και
- $1 > \beta \;\Rightarrow\; (1 - \beta) > 0.$

Άσκηση 9.

Αν $0 < x < y$, να δειχθεί ότι

$$\frac{x^5 + 6x - 2}{x} < \frac{y^5 + 6y - 2}{y}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{x^5+6x-2}{x} < \frac{y^5+6y-2}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^5}{x}+\frac{6x}{x}-\frac{2}{x} < \frac{y^5}{y}+\frac{6y}{y}-\frac{2}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & x^4+6-\frac{2}{x} < y^4+6-\frac{2}{y} \\ \Leftrightarrow \quad & x^4-\frac{2}{x} < y^4-\frac{2}{y}. \end{aligned}$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση $x^4-\frac{2}{x} < y^4-\frac{2}{y}$ ισχύει. Πράγματι, αφού $x, y > 0$ και $x < y$, από γνωστές ιδιότητες προκύπτει ότι

$$x^4 < y^4$$

και

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{2}{x} < -\frac{2}{y}.$$

Προσθέτοντας κατα μέλη τα δύο προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$x^4-\frac{2}{x} < y^4-\frac{2}{y},$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 10.

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει ότι

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha+4\beta+5=0.$$

Λύση. Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ταυτότητες ώστε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$x^{2\nu}+y^{2\nu}=0 \;\Leftrightarrow\; x=y=0.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \alpha^2+\beta^2+2\alpha+4\beta+5=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha^2+2\alpha+1+\beta^2+4\beta+4=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha+1)^2+(\beta+2)^2=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha=-1 \quad \text{και} \quad \beta=-2. \end{aligned}$$

Άσκηση 11.

Αν $2,5 < x < 3,7$ και $1,3 < y < 2,7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $x + y$

(β) $x - y$

(γ) $\dfrac{x}{y}$

(δ) $x^2 + y^2$

Λύση. (α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δοσμένες σχέσεις, προκύπτει ότι

$$\left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ 1,3 < y < 2,7 \end{array} \right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2,5 + 1,3 < x + y < 3,7 + 2,7$$

$$\Leftrightarrow 3,8 < x + y < 6,4.$$

(β) Έχουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ 1,3 < y < 2,7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ -1,3 > -y > -2,7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ -2,7 < -y < -1,3 \end{array} \right\}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2,5 - 2,7 < x - y < 3,7 - 1,3$$

$$\Rightarrow -0,2 < x - y < 2,4.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ 1,3 < y < 2,7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ \dfrac{1}{1,3} > \dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{2,7} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ \dfrac{1}{2,7} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{1,3} \end{array} \right\}$$

$$\overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \frac{2,5}{2,7} < \frac{x}{y} < \frac{3,7}{1,3}.$$

(δ) Έχουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{c} 2,5 < x < 3,7 \\ 1,3 < y < 2,7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2,5^2 < x^2 < 3,7^2 \\ 1,3^2 < y^2 < 2,7^2 \end{array} \right\}$$

$$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2,5^2 + 1,3^2 < x^2 + y^2 < 3,7^2 + 2,7^2.$$

Άσκηση 12.

Να δειχθεί ότι

$$x^4 + x^2 > x - 2, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x-2<0$, τότε ισχύει αφού $x^4+x^2\geq 0$ (ως άθροισμα μη αρνητικών).
- Αν $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} & x^4+x^2>x-2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^4+x^2-x+2>0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^4+2+x(x-1)>0, \end{aligned}$$

  που ισχύει αφού $(x^4+2)>0$ και $x(x-1)>0$ (διότι $x\geq 2$).

Άσκηση 13.

Αν $\alpha, \beta, \gamma>0$, να δειχθεί ότι

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq \alpha+\beta+\gamma.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\geq \alpha+\beta+\gamma \\ \overset{:\alpha\beta\gamma>0}{\iff}\quad & \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geq \frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta} \qquad (1) \end{aligned}$$

Θέτοντας $k=\frac{1}{\alpha}$, $\lambda=\frac{1}{\beta}$ και $\mu=\frac{1}{\gamma}$, η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \iff\quad & k^2+\lambda^2+\mu^2\geq \lambda\mu+k\mu+k\lambda \\ \overset{(\cdot 2)}{\iff}\quad & 2k^2+2\lambda^2+2\mu^2\geq 2\lambda\mu+2k\mu+2k\lambda \\ \iff\quad & (k-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2+(\mu-k)^2\geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει, ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.