Κουβεντιάζοντας με τις ασκήσεις

Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου *(Θέματα σε όλη τη ύλη)*

Άσκηση 2η

Αν f συνεχής στο [1, 11] , παραγωγίσημη στο (1, 11) και f(1)=1, f(11)=11 δείξτε ότι υπάρχουν α, β στο (1, 11) τέτοια ώστε 2f ΄(α) +3f ΄(β)=5

Πριν την λύση : *Μόλον είναι φανερό ότι θα χρειαστούμε 2 Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα του [1, 11] , το ερώτημα είναι σε ποια διαστήματα . Ας κάνουμε μια ανάλυση . Διαλέγουμε τον* $x_0 \in (1, 11)$ *οπότε χαρίζουμε το [1, 11] σε δύο διαστήματα* $[1,\ x_0]$ *και* $[x_0, 11]$ *στα οποία θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. οπότε εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει* $\alpha \in (1,\ x_0)$ *και* $\beta \in (x_0, 11)$ *τέτοια ώστε :*

$f'(\alpha) = \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1} = \frac{f(x_0)-1}{x_0-1}$ *και* $f'(\beta) = \frac{f(x_0)-f(11)}{x_0-11} = \frac{f(x_0)-11}{x_0-11}$ *τότε όμως*

$$2f'(\alpha) + 3f'(\beta) = 2\frac{f(x_0)-1}{x_0-1} + 3\frac{f(x_0)-11}{x_0-11} =$$

$$= \frac{f(x_0)(5x_0-25) + (-35x_0+55)}{(x_0-1)(x_0-11)}$$

Όμως εμείς θέλουμε με κατάλληλη επιλογή του x_0 *να πετύχουμε ώστε το αποτέλεσμα να είναι 5 μια πρώτη απαίτηση λοιπόν είναι να «εξαφανίσουμε» από το αποτέλεσμα το* $f(x_0)$ *πράγμα που μπορούμε να πετύχουμε αρκεί να επιλέξουμε* $5x_0 - 25 = \Leftrightarrow x_0 = 5$ *και τότε πράγματι*

$$2f'(\alpha) + 3f'(\beta) = \frac{f(x_0)(25-25) + (-175+55)}{4(-6)} = \frac{120}{24} = 5 \quad !!!!!$$

Επομένως καταφέραμε να δείξουμε το ζητούμενο κάνοντας ΘΜΤ στα διαστήματα [1, 5] και [5.11] ας

Ας μεθοδευτούμε

Το αρχικό διάστημα [1,11] πλάτους 11-1=10 το χωρίζουμε σε 5 ίσα διαστήματα πλάτους 2 και κάναμε Θ.Μ.Τ. στο [1, 1+**2***2]=[1, 5](το **2** ο συντελεστής του f΄(α)) και δεύτερο Θ.Μ.Τ. στο [5,5+**3***2]=[5, 11]](το **3** ο συντελεστής του f΄(β))

Λύση

f συνεχής στο [1, 5] μιας και f συνεχής στο [1, 11],

f παραγωγίσημη στο (1, 5) μιας και f συνεχής στο (1, 11) από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει

$\alpha \in (1,5) : f'(\alpha) = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{f(5)-1}{4}$

όμοια υπάρχει $\beta \in (5,11) : f'(\beta) = \frac{f(5)-f(11)}{5-11} = -\frac{f(5)-11}{6}$

οπότε $2f'(\alpha) + 3f'(\beta) = 2\frac{f(5)-1}{4} + 3\left(-\frac{f(5)-11}{6}\right) = \frac{60}{12} = 5$

<u>ας γενικεύσουμε:</u>

Άσκηση 3η

Αν f συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσημη στο (α, β) και f(α)=α, f(β)=β δείξτε ότι υπάρχουν x_1 , x_2 στο (α, β) τέτοια ώστε κf ΄(x_1) +λf ΄(x_2)=κ+λ με κ, λ >0

Πριν την λύση : *το διάστημα (α, β) έχει πλάτος β-α το πλάτος αυτό το χωρίζω σε κ+λ ίσου πλάτους διαστήματα που το καθένα έχει πλάτος d=$\frac{\beta-\alpha}{\kappa+\lambda}$ θα εφαρμόσω δύο Θ.Μ.Τ. το πρώτο στο διάστημα [α, α+κd] και το δεύτερο στο* $[\alpha + kd, \beta]$

Λύση

f συνεχής στο $[\alpha, \alpha + kd]$ διότι f συνεχής [α, β]
f παραφωγίσημη στο $(\alpha, \alpha + kd)$ διότι f παραγωγίσημη στο (α, β)

από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \alpha + kd)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(\alpha + kd) - f(\alpha)}{\alpha + kd - \alpha} = \frac{f(\alpha + kd) - f(\alpha)}{kd}$$

Όμοια υπάρχει $x_2 \in (\alpha + kd, \beta)$:

$$f'(x_2) = \frac{f(\alpha + kd) - f(\beta)}{\alpha + kd - \beta} = \frac{f(\alpha + kd) - f(\beta)}{kd - (\beta - \alpha)} =$$

$$= \frac{f(\alpha + kd) - f(\beta)}{kd - (k + \lambda)d} = \frac{f(\beta) - f(\alpha + kd)}{\lambda d}$$

Τότε: $\kappa f'(x_1) + \lambda f'(x_2) = \kappa\frac{f(\alpha+kd)-f(\alpha)}{k\,d} + \lambda\frac{f(\beta)-f(\alpha+kd)}{\lambda d} =$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{d} = \frac{\beta - \alpha}{d} = \kappa + \lambda$$

Άσκηση 4η

Αν f συνεχής στο [1, 11] , παραγωγίσημη στο (1, 11) με f΄(x) ≠ 0 και f(1)=1, f(11)=11 δείξτε ότι υπάρχουν γ, δ στο (1, 11) τέτοια ώστε : $\frac{1}{2f\,'(\alpha)}+\frac{1}{3f\,'(\beta)}=\frac{5}{6}$

Πριν την λύση : *Θα χρειαστούμε 2 Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα του [1, 11] ,. Διαλέγουμε* $x_0 \in (1,11)$ *οπότε χαρίζουμε το [1, 11] σε δύο διαστήματα* $[1,\ x_0]$ *και* $[x_0, 11]$ *στα οποία θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. Εύκολα προκύπτει ότι υπάρχουν* $\gamma \in (1,\ x_0)$ *και* $\delta \in (x_0, 11)$ *τέτοια ώστε :*

$$f'(\gamma)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{f(x_0)-1}{x_0-1} \quad \text{και } f'(\delta)=\frac{f(x_0)-f(11)}{x_0-11}=\frac{f(x_0)-11}{x_0-11} \ \text{ τότε όμως}$$

$$\frac{1}{2f\,'(\gamma)}+\frac{1}{3f\,'(\delta)}=\frac{1}{2\frac{f(x_0)-1}{x_0-1}}+\frac{1}{3\frac{f(x_0)-11}{x_0-11}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{f(x_0)(x_0-5)-(7x_0-11)}{f^2(x_0)-12f(x_0)+11}$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε κατάλληλο x_0 *στο (1,11) ώστε :*

$$\frac{f(x_0)(x_0-5)-(7x_0-11)}{f^2(x_0)-12f(x_0)+11}=1 \Leftrightarrow f^2(x_0)-(x_0+7)f(x_0)+7x_0=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_0)=7 \\ \text{ή} \\ f(x_0)=x_0 \end{matrix}\right\}$$

Την περίπτωση $f(x_0)=x_0$ *δεν μπορούμε να την υπερασπιστούμε δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει* x_0 *στο (1, 11) τέτοιο ώστε* $f(x_0)=x_0$ *αντίθετα*

Επειδή f(1)=1<7<11=f(11) και με δεδομένη την συνέχεια της f από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει x_0 *στο (1, 11) τέτοιο ώστε* $f(x_0)=7$*. Παρατηρήστε τώρα ότι f(11)-f(1)=10 ,* $f(x_0)-f(1)=7-1=6, f(11)-f(x_0)=11-7=4$ *δηλαδή αν* $d=\frac{f(11)-f(1)}{5}=2$ *τότε* $f(11)-f(x_0)=2d$, $f(x_0)-f(1)=3d$

<u>Ας μεθοδευτούμε</u>

Χωρίζουμε το διάστημα τιμών [f(1), f(11)] σε 5 ίσα διαστήματα πλάτους $d=\frac{f(11)-f(1)}{5}=2$ και επιλέγουμε κατάλληλο x_0 στο διάστημα (1,11) άστε ο $f(x_0)=f(1)+\mathbf{3}d=7$ να χωρίσει το διάστημα τιμών $[f(1), f(11)]$ στα διαστήματα $[f(1), f(x_0)]$ και $[f(x_0), f(11)]$ και εφαρμόζουμε δυο διαφορετικά Θ.Μ.Τ.

Λύση

f συνεχής στο $[1, x_0]$ μιας και f συνεχής στο [1, 11],

f παραγωγίσημη στο $(1, x_0)$ μιας και f παραγωγίσημη στο (1, 11)

από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει

$\gamma \in (1, x_0) : f\,'(\gamma) = \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1} = \frac{6}{x_0-1}$

όμοια υπάρχει $\delta \in (x_0, 11) : f\,'(\delta) = \frac{f(x_0)-f(11)}{x_0-11} = -\frac{4}{x_0-11}$

οπότε $\frac{1}{2f\,'(\alpha)} + \frac{1}{3f\,'(\beta)} = \frac{1}{2\frac{6}{x_0-1}} + \frac{1}{3\frac{4}{11-x_0}} = \frac{5}{6}$

<u>**ας γενικεύσουμε:**</u>

Άσκηση 5η

Αν f συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσημη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$ και f(α)=α, f(β)=β με f(α)<f(β) δείξτε ότι υπάρχουν γ, δ στο (α, β) τέτοια ώστε : $\frac{1}{\lambda f\,'(\gamma)} + \frac{1}{\kappa f\,'(\delta)} = \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}$

Πριν την λύση : *το διάστημα (f(α) ,f(β)) έχει πλάτος f(β)-f(α) , το πλάτος αυτό το χωρίζω σε κ+λ ίσου πλάτους διαστήματα που το καθένα έχει πλάτος d=*$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\kappa+\lambda}$ *θα εφαρμόσω δύο Θ.Μ.Τ. το πρώτο στο διάστημα [f(α), f(α)+κd] και το δεύτερο στο* $[\,f(\alpha)+kd, f(\beta)]$

Λύση

Αν d=$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\kappa+\lambda}$ Θα δείξουμε ότι :

$f(\alpha) < f(\alpha) + kd < f(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa+\lambda)f(\alpha) < (\kappa+\lambda)f(\alpha) + (\kappa+\lambda)kd < (\kappa+\lambda)f(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\kappa+\lambda)f(\alpha) < (\kappa+\lambda)f(\alpha) + \kappa f(\beta) - \kappa f(a) < (\kappa+\lambda)f(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa f(\alpha) + \lambda f(\alpha) < \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \kappa f(\alpha) + \lambda f(\alpha) < \lambda f(\alpha) + \kappa f(\beta) \\ \text{και} \\ \lambda f(\alpha) + \kappa f(\beta) < \kappa f(\beta) + \lambda f(\beta) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \quad \text{που ισχύει}$$

Επομένως: f(α)<f(α)+κd<f(β) και f συνεχής στο [α, β] οπότε από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει x_0 στο (α, β) τέτοιος ώστε $f(x_0) = f(\alpha) + \kappa d$

και

f συνεχής στο $[\alpha, x_0]$

f παραγωγίσημη στο (α, x_0)

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\gamma \in (\alpha, x_0): f'(\gamma) = \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = \frac{kd}{x_0-\alpha}$ όμοια

υπάρχει $\delta \in (x_0, \beta): f'(\delta) = \frac{f(x_0)-f(\beta)}{x_0-\beta} = \frac{f(\alpha)+kd-f(\alpha)-(\kappa+\lambda)d}{x_0-\beta} = \frac{\lambda d}{\beta-x_0}$

$$\frac{1}{\lambda f'(\gamma)} + \frac{1}{\kappa f'(\delta)} = \frac{1}{\lambda \frac{kd}{x_0-\alpha}} + \frac{1}{\kappa \frac{\lambda d}{\beta - x_0}} = \frac{\beta-\alpha}{\kappa\lambda d} = \frac{(\kappa+\lambda)d}{\kappa\lambda d} = \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}$$

Άσκηση 6η

Αν f συνεχής στο [0,10] , παραγωγίσημη στο (0, 10) με f(0)= 0, f(10)= 10 δείξτε ότι υπάρχουν γ, δ στο (0, 10) τέτοια ώστε : $f'(\gamma) \cdot f'(\delta) = 10$

Πριν την λύση : *Θα χρειαστούμε 2 Θ.Μ.Τ. σε διαστήματα του [0, 10] ,. Διαλέγουμε* $x_0 \in (0, 10)$ *οπότε χαρίζουμε το [0, 10] σε δύο διαστήματα* $[0, x_0]$ *και* $[x_0, 10]$ *στα οποία θα εφαρμόσουμε 2 Θ.Μ.Τ. Εύκολα προκύπτει ότι υπάρχουν* $\gamma \in (0, x_0)$ *και* $\delta \in (x_0, 10)$ *τέτοια ώστε :*

$f'(\gamma) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0} = \frac{f(x_0)}{x_0}$ *και* $f'(\delta) = \frac{f(x_0)-f(10)}{x_0-10} = \frac{f(x_0)-10}{x_0-10}$ *τότε όμως*

$$f'(\gamma)f'(\delta) = \frac{f(x_0)}{x_0}\frac{f(x_0)-10}{x_0-10}$$

Αρκεί λοιπον να προσδιορίσουμε κατάλληλο x_0 *στο (0,10) ώστε :*

$$\frac{f(x_0)}{x_0}\frac{f(x_0)-10}{x_0-10} = 1 \Leftrightarrow f^2(x_0) - 10f(x_0) - x_0(x_0-10) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_0) = 10 - x_0 \\ \text{ή} \\ f(x_0) = x_0 \end{matrix}\right\}$$

Την περίπτωση $f(x_0) = x_0$ *δεν μπορούμε να την υπερασπιστούμε δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει* x_0 *στο (0, 10) τέτοιο ώστε* $f(x_0) = x_0$ *αντίθετα*

Επειδή g(x)=f(x)+x-10 είναι συνεχής και g(0)g(10)=-100 <0 από θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 *στο (0, 10) τέτοιο ώστε* $f(x_0) = 10 - x_0$ *επομένως αρκεί (για αυτόν τον* x_0 *) να εφαρμόσω δύο Θ.Μ.Τ το ένα στο* $[0, x_0]$ *και το άλλο στο* $[x_0, 10]$

Ας μεθοδευτούμε

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει x_0 στο (0,1) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 10 - x_0$ κατόπιν εφαρμόζουμε δύο Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 10]$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο

Λύση

Έστω $g(x)=f(x)+x-10$

g συνεχής στο $[0, 10]$ και

$g(0)g(10)= -100 < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 στο $(0, 10)$:

$g(x_0)=0$ οπότε $f(x_0)=10-x_0$

και

f συνεχής στο $[0, x_0]$

f παραγωγίσημη στο $(0, x_0)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει γ στο $(0, x_0)$: $f\,'(\gamma)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{10-x_0}{x_0}$

όμοια υπάρχει δ στο $(x_0, 10)$: $f\,'(\delta)=\frac{f(x_0)-f(10)}{x_0-10}=\frac{x_0}{10-x_0}$

επομένως : $f\,'(\gamma)\, f\,'(\delta)=\frac{10-x_0}{x_0}\frac{x_0}{10-x_0}=1$

Άσκηση 7η

Αν f συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσημη στο (α, β) με f(α)= α, f(β)= β δείξτε ότι υπάρχουν γ, δ στο (α, β) τέτοια ώστε : $\mathbf{f\,'(\gamma)\cdot f\,'(\delta)=1}$

<u>Ας μεθοδευτούμε</u>

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει x_0 στο (α, β) τέτοιο ώστε $f(x_0)=\beta+\alpha-x_0$ κατόπιν εφαρμόζουμε δύο Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει το ζητούμενο

Λύση

Έστω $g(x)=f(x)+x-\alpha-\beta$

g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

$g(\alpha)g(\beta)= -(\beta-\alpha)^2 < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 στο (α, β):

$g(x_0)=0$ οπότε $f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$

και

f συνεχής στο [α, x_0]

f παραγωγίσημη στο (α, x_0)

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει γ στο (α, x_0): f ΄(γ)=$\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = \frac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}$

όμοια υπάρχει δ στο (x_0, β): f ΄(δ)=$\frac{f(x_0)-f(\beta)}{x_0-\beta} = \frac{\alpha-x_0}{x_0-\beta}$

επομένως : f ΄(γ) f ΄(δ)= $\frac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}\frac{\alpha-x_0}{x_0-\beta} = 1$