

“ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ” και “ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ”

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2 ΜΑΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 4(2+2)

A2. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 7

A3. Ψ

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0, \text{ επειδή } \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$. Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u .

Μονάδες 4

A4. Λ – Λ – Σ – Λ – Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f'(x) = \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right)' = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} + 1 \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2e}{x^3} < 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα f στρέφει κοίλα κάτω στο $(0, +\infty)$.

Εξετάζουμε αν η $x = 0$ είναι ασύμπτωτη της f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{e}{x} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{pmatrix} = -\infty$$

Άρα η $x = 0$ είναι ασύμπτωτη της f .

Εξετάζουμε αν η f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e}{x^2} + 1 \right) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{D'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e}{x^2} \right) = 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} \right) = +\infty$$

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$:

Μονάδες 6

B2.

Αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και «1-1» άρα αντιστρέψιμη.

$$f \text{ συνεχής άρα } f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{e}{x} + x \right) = +\infty$$

$$\left. \begin{matrix} f^{-1}(2e - f(x)) > e \\ \text{πρέπει } x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow 2e - f(x) > f(e) \Leftrightarrow f(x) < 2e - \left(\ln e - \frac{e}{e} + e \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) < 2e - e \Leftrightarrow f(x) < e \Leftrightarrow f(x) < f(e) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x < e. \text{ Άρα } \boxed{0 < x < e}$$

Μονάδες 5

B3.

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\ln x - (ex + 1) \left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e} \right) = 2 \Leftrightarrow \ln x - e^2 + x - \frac{e}{x} + \frac{1}{e} = 2 \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} + x = 2 - \frac{1}{e} + e^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(e^2) \stackrel{f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} \boxed{x = e^2}$$

Μονάδες 5

B4.

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - \frac{e}{x} + x + \ln \frac{1}{x} - ex + \frac{1}{x} = \ln x - \frac{e}{x} + x - \ln x - ex + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = -\frac{e}{x} + x - ex + \frac{1}{x} = -e\left(\frac{1}{x} + x\right) + x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x) = (1-e)\left(\frac{1}{x} + x\right)$$

Για κάθε $x > 0$ $\frac{1}{x} + x > 0$, άρα $g(x) < 0$, $x > 0$

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e -(1-e)\left(\frac{1}{x} + x\right) dx = (e-1) \int_1^e \left(\frac{1}{x} + x\right) dx = (e-1) \left[\ln x + \frac{x^2}{2} \right]_1^e$$

$$E(\Omega) = (e-1) \left[\left(\ln e + \frac{e^2}{2} \right) - \left(\ln 1 + \frac{1^2}{2} \right) \right] = (e-1) \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$E(\Omega) = (e-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} \right) \tau.μ.$$

β)

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με :

$$g'(x) = \left((1-e)\left(\frac{1}{x} + x\right) \right)' = (1-e) \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = (e-1) \frac{1-x^2}{x^2}, x > 0$$

Το πρόσημο και η μονοτονία της g παρουσιάζονται στο πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$1-x^2$		+	-
$g'(x)$		+	-
g			

μέγιστο
 $g(1) = 2(1-e)$

Η g έχει μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $g(x_0) = 2(1-e)$.

Ισχύει $g(x) \leq \alpha$ για κάθε $x > 0$, άρα $\alpha \geq g(x_0) \Leftrightarrow \alpha \geq 2(1-e) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + e \geq 1$

Μονάδες 9(4+5)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $D_g = (0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = (\ln x + 4x - 1)' = \frac{1}{x} + 4 > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα g γνησίως αύξουσα στο D_g και συνεχής σ' αυτό άρα

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ αφού:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (4x - 1) = -1 \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 4x - 1) = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 1) = +\infty \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 4x - 1) = +\infty$$

$0 \in g((0, +\infty))$ άρα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Μονάδες 5

$$\text{Γ2. Πρέπει: } \left\{ \begin{array}{l} x+2 \neq 0 \\ \frac{x^2}{x+2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 4x^2 \geq 4(x+2) \Leftrightarrow \ln(x^2) - \ln(x+2) + 4x^2 \geq 4(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2) + 4x^2 - 1 \geq \ln(x+2) + 4(x+2) - 1 \Leftrightarrow g(x^2) \geq g(x+2) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 \geq x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2 \text{ κι επειδή } x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty) \text{ άρα}$$

$$\boxed{x \in (-2, -1] \cup [2, +\infty)}$$

Μονάδες 5

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο $[1, 4]$ της εξίσωσης :

$$\ln\left(\sqrt[4]{\frac{f(x)}{x}}\right) = x - f(x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x - f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(f(x)) - \ln x = 4x - 4f(x) \Leftrightarrow \ln(f(x)) + 4f(x) - 1 = \ln x + 4x - 1 \Leftrightarrow$$

$$g(f(x)) = g(x) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in [1, 4]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, 4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$h(1) = f(1) - 1 \geq 0 \text{ αφού } f([1, 4]) = [1, 4] \text{ άρα } f(1) \in [1, 4] \Leftrightarrow f(1) \geq 1$$

$$h(4) = f(4) - 4 \leq 0 \text{ αφού } f([1, 4]) = [1, 4] \text{ άρα } f(4) \in [1, 4] \Leftrightarrow f(4) \leq 4$$

$$\text{Άρα } h(1) \cdot h(4) \leq 0$$

➤ Αν $h(1) \cdot h(4) = 0 \Leftrightarrow h(1) = 0$ ή $h(4) = 0$, άρα 1, 4 λύσεις της εξίσωσης $h(x) = 0$.

➤ Αν $h(1) \cdot h(4) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$ της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1, 4]$ ώστε :

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow \ln \left(\sqrt[4]{\frac{f(\xi)}{\xi}} \right) = \xi - f(\xi).$$

Μονάδες 5

Γ4. α) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 4)$ της εξίσωσης :

$$x \cdot f(x) [f(x) + xf'(x)] = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f(x) [x \cdot f(x)]' = 0 \Leftrightarrow ((x \cdot f(x))^2)' = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = (x \cdot f(x))^2$, $x \in [1, 4]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1, 4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\varphi'(x) = ((x \cdot f(x))^2)' = 2x \cdot f(x) (f(x) + xf'(x))$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(1) = (1 \cdot f(1))^2 = f^2(1) \\ \varphi(4) = (4 \cdot f(4))^2 = 16f^2(4) \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{έχουμε } f(1) = 4f(4) \Rightarrow f^2(1) = 16f^2(4)) \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(4)$$

Από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$ ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$x_0 f(x_0) [f(x_0) + x_0 f'(x_0)] = 0.$$

$$\text{β)} \text{ Ισχύει } f(1) \in [1, 4] \Leftrightarrow 1 \leq f(1) \leq 4 \stackrel{f(1)=4f(4)}{\Leftrightarrow} 1 \leq 4f(4) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(4) \leq 1 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } f(4) \in [1, 4] \Leftrightarrow 1 \leq f(4) \leq 4 \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \quad 1 \leq f(4) \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{f(4) = 1} \text{ και } \boxed{f(1) = 4}.$$

Για την f ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 4]$ άρα:

$$\text{υπάρχει } x_1 \in (1, 2) \subseteq (1, 4) \text{ ώστε } f'(x_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - 4$$

$$\text{υπάρχει } x_2 \in (2, 4) \subseteq (1, 4) \text{ ώστε } f'(x_2) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - f(2)}{2}$$

$$\text{Έχουμε: } f'(x_1) + 2f'(x_2) = f(2) - 4 + 2 \cdot \frac{1 - f(2)}{2} = f(2) - 4 + 1 - f(2) = -3$$

Μονάδες 10(5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - \ln 2}{x^2 + x}$, κοντά στο 0 με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{1}{2}$

$$g(x) = \frac{f(x) - \ln 2}{x^2 + x} \Leftrightarrow f(x) = (x^2 + x)g(x) + \ln 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((x^2 + x)g(x) + \ln 2) \stackrel{\text{f.σ.η.ς}}{\Rightarrow} f(0) = 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \ln 2 \Rightarrow \underline{f(0) = \ln 2}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)g(x) + \ln 2 - \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)g(x)}{x} \Rightarrow$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} ((x+1)g(x)) \Rightarrow \underline{f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

Έστω ε εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$.

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow \boxed{(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + \ln 2}$$

Μονάδες 6

Δ2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4f(x) + x^2 - 4f(0) \cdot x} \stackrel{\text{D'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4f'(x) + 2x - 4f(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4f(x) + 2x - 4\ln 2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2f(x) + x - 2\ln 2} = +\infty \quad \text{διότι:}$$

► $\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) + x - 2\ln 2) = 2f(0) + 0 - 2\ln 2 = 2\ln 2 - 2\ln 2 = 0$

► η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα, η C_f είναι πάνω από (ε) , εκτός σημείου επαφής, άρα

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x - 2\ln 2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με την «}=\text{» να ισχύει}$$

μόνο για $x = 0$. Άρα κοντά στο 0 ισχύει:

$$2f(x) + x - 2\ln 2 > 0. \text{ Άρα } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4F(x) + x^2 - 4f(0) \cdot x} = +\infty}.$$

Μονάδες 7

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση h με τύπο

$$h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow h(x) = \ln(e^x + 1) - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \ln(e^0 + 1) - 2 \cdot 0 = \ln 2 > 0 \\ h(1) &= \ln(e^1 + 1) - 2 \cdot 1 = \ln(e + 1) - 2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

$$\left(\ln(e + 1) - 2 = \ln(e + 1) - \ln e^2 = \ln \frac{e + 1}{e^2} < 0 \quad \text{αφού} \quad \frac{e + 1}{e^2} < 1 \right)$$

Από θ. Bolzano ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε :

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

$$h'(x) = (\ln(e^x + 1) - 2x)' = \frac{e^x}{e^x + 1} - 2 \Rightarrow h'(x) = \frac{-e^x - 2}{e^x + 1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει : $f(x_0) = x_0$.

Μονάδες 6

Δ4. Έχουμε :

$$\blacktriangleright \int_{x_0}^{2x_0} xf'(x - x_0)dx = \begin{pmatrix} \text{θέτω } u = x - x_0 \Rightarrow dx = du \\ \text{όταν } x = x_0 \quad \text{τότε } u = 0 \\ \text{όταν } x = 2x_0 \quad \text{τότε } u = x_0 \end{pmatrix} = \int_0^{x_0} (u + x_0)f'(u)du =$$

$$= \int_0^{x_0} uf'(u)du + \int_0^{x_0} x_0 f'(u)du = [uf(u)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} f(u)du + x_0 \int_0^{x_0} f'(u)du =$$

$$= [uf(u)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} f(u)du + x_0 [f(u)]_0^{x_0} = x_0 f(x_0) - \int_0^{x_0} f(u)du + x_0 f(x_0) - x_0 f(0)$$

$$\text{Άρα } \int_{x_0}^{2x_0} xf'(x - x_0)dx = 2x_0 f(x_0) - \int_0^{x_0} f(u)du - x_0 f(0) \stackrel{\Delta 3}{=} 2x_0^2 - \int_0^{x_0} f(u)du - x_0 \ln 2$$

Μονάδες 6