“ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ” και “ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ”

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

14 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΕΑ(9)

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 5(3+2)

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 6

Α3.

α. Αληθής

β .Έστω το ελάχιστο της f στο διάστημα $[0,5]$ είναι 3 τότε για κάθε x στο $[0,5]$ είναι :

$$f(x)-3\geq 0\Rightarrow \int_0^5 (f(x)-3)dx\geq 0\Rightarrow \int_0^5 f(x)dx-3\int_0^5 dx\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10-3[x]_0^5\geq 0\Rightarrow -5\geq 0 \quad \textbf{άτοπο}$$

Μονάδες 4

Α4. Ψευδής

π.χ. $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^2+x$ παραγωγίσιμες στο R με $f'(x)=2x\,, x\in R$ και $g'(x)=2x+1\,, x\in R$. Ισχύει $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x\in R$ όμως δεν ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in R$ αφού για κάθε $x<0$, $f(x)>g(x)$.

Μονάδες 4

Α5.

Σ - Σ - Σ

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $f'(x)=(3+2F(x))'=2F'(x)=2f(x)$ (1) για κάθε $x\in R$.

Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\Phi'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)e^{2x}-2e^{2x}f(x)}{e^{4x}}=\frac{e^{2x}\left(f'(x)-2f(x)\right)}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}\overset{(1)}{=}0$$

Άρα η Φ είναι σταθερή στο R.

Για x = 0 στην αρχική σχέση έχουμε $f(0)=3+2F(x) \overset{F(0)=0}{\Leftrightarrow} f(0)=3$

Από Β1 $\Phi(x)=c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}}=c, c\in R$ για κάθε $x\in R$.

Για x = 0 έχουμε: $\Phi(0)=c \Leftrightarrow \frac{f(0)}{e^{2\cdot 0}}=c \Leftrightarrow c=3$. Άρα $\Phi(x)=3 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{}=3 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{f(x)=3e^{2x}}}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

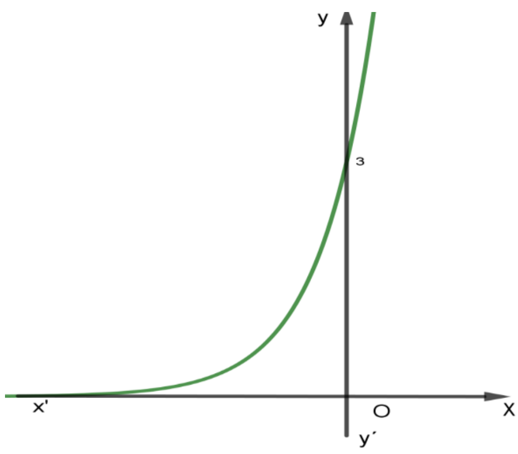
Ο τύπος της f όπως και η απόδειξη ότι η Φ είναι σταθερή, μπορούν να αποδειχθούν κατευθείαν από τη σχέση (1): $f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 5

Β2. $f'(x)=6e^{2x}>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα.

$f''(x)=12e^{2x}>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι στρέφει κοίλα άνω (κυρτή) στο R και δεν έχει σημεία καμπής.

- Η f είναι συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{2x}}{x}\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{D'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^{2x}}{1}=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}3e^{2x}=3\cdot 0=0$, άρα η C_f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον άξονα xx΄



Μονάδες 8

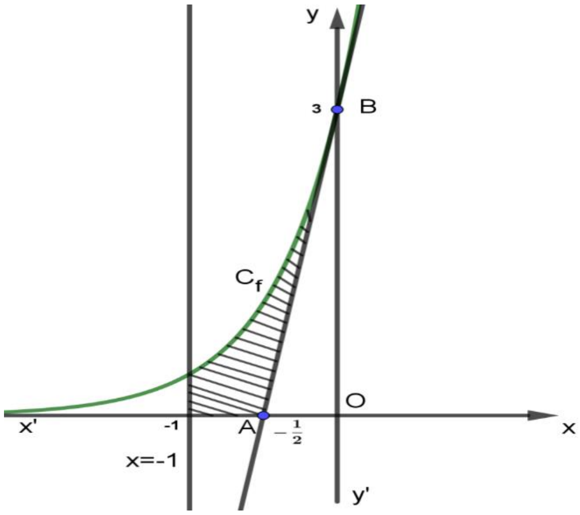
Β3.

$$E(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(x)|dx=\int_0^{\lambda}\left|3e^{2x}\right|dx=\int_0^{\lambda}3e^{2x}dx=\frac{3}{2}\left[e^{2x}\right]_0^{\lambda}\Rightarrow \boxed{\mathbf{E(\lambda)=\frac{3}{2}e^{2\lambda}-\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{E(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\frac{3}{2}e^{2\lambda}-\frac{3}{2}}{\lambda}\overset{D'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{3e^{2\lambda}}{1}\right)=3$$

Μονάδες 5(3+2)

Β4.



Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=\left(3e^{2x}\right)'=6e^{2x}\quad ,x\in R$.

Η C_f τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο Β(0,3)

ε εφαπτομένη της C_f στο Β(0,3). Η εξίσωση της ε είναι:

$$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow$$
$$\boxed{\mathbf{(\varepsilon): y=6x+3}}$$

Ω: χωρίο που ορίζεται από C_f , ε άξονα xx΄ και την ευθεία x = -1

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx-(OAB)=\int_{-1}^{0}\left|3e^{2x}\right|dx-\frac{1}{2}(OA)(OB)$$
$$E(\Omega)=\int_{-1}^{0}3e^{2x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}\left[e^{2x}\right]_{-1}^{0}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{3}{2e^2}$$

Άρα $\boxed{\mathbf{E(\Omega)=\frac{3e^2-6}{4e^2}\ \tau.\mu.}}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α) Για κάθε $x>1$είναι:

$g'(x)=2f(x)f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}[2xf(x)f'(x)-1]=\frac{1}{x}\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=0$

οπότε η g είναι σταθερή.

Ισχύει $g(x) = c, c \in \mathbb{R}$ και $g(e) = f^2(e) - \ln e \Rightarrow c = 1 - 1 \Rightarrow c = 0$.

Άρα $g(x) = 0$, οπότε $f^2(x) = \ln x, x > 1$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και ισχύει $f^2(x) = \ln x \neq 0$ για κάθε $x > 1$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f(e) > 0$.

Άρα, για κάθε $x > 1$ έχουμε $f(x) > 0$, οπότε $f(x) = \sqrt{\ln x}, x > 1$.

Μονάδες 4

β)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο B, διέρχεται από το A.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}, x > 1$ και $f'(e) = \frac{1}{2e}$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο B έχει εξίσωση $y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e)$ δηλαδή $y = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$.

Με $x = -e$ έχουμε: $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο B διέρχεται πραγματικά από το A.

γ)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x, x > 1$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+1], x > 1$. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x+1) - h(x)}{x+1-x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x, \quad (1)$$

Αλλά,

$$x < \xi < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

που είναι το ζητούμενο.

Μονάδες 8(4+4)

Γ2.

α. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x) + x^2 f''(x) = 2 \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) + xf''(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow (xf'(x))' = (2\ln x)'$$

$$\Rightarrow xf'(x) = 2\ln x + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \quad (4).$$

Από τη σχέση (4) για $x = 1$ έχουμε: $1 \cdot f'(1) = 2\ln 1 + c_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c_1 = 2$.

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $xf'(x)=2\ln x+2\overset{:x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}+2\cdot\dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow f'(x)=2\ln x(\ln x)'+2(\ln x)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln^2x+2\ln x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln^2x+2\ln x+c_2,\quad c_2\in R\qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) για x =1 έχουμε: $f(1)=\ln^2 1+2\ln 1+c_2\overset{(2)}{\Leftrightarrow}c_2=0$.

Άρα $f(x)=\ln^2x+2\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [1,e] και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα xx΄ και τις ευθείες με εξισώσεις x = 1 και x = e, είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\ln^2x+2\ln x\right)dx=\int_1^e(x)'\ln^2xdx+2\int_1^e\ln xdx=$$

$$=\left[x\ln^2x\right]_1^e-2\int_1^e x\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+2\int_1^e\ln xdx=e\ln^2e-2\int_1^e\ln xdx+2\int_1^e\ln xdx$$

$$\boxed{E(\Omega)=e\cdot 1^2=e\ \tau.\mu.}$$

γ.

$$\int_1^\alpha f(x)dx=\left[x\ln^2x\right]_1^\alpha-2\int_1^\alpha\ln xdx+2\int_1^\alpha\ln xdx=\alpha\ln^2\alpha\ \ (6)$$

έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\int_1^\alpha f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha+1}\overset{(6)}{=}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\alpha\ln^2\alpha}{\alpha\ln^2\alpha+1}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha\ln^2\alpha\left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right)}{\alpha\ln^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}}=1,$$ διότι:

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(\alpha\ln^2\alpha\right)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}=0$
- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=1$

- $\left|\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right|\le\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\Rightarrow-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\le\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\le\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}$

Είναι: $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha\ln^2\alpha}=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}=0$,

συνεπώς $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\ln^2\alpha}\right)=1}$.

Μονάδες 15(5+5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{t\to-\infty}\left(\sqrt{t^2-4f(x)f'(x)t+4}+t\right)=\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2-4f(x)f'(x)t+4-t^2}{\sqrt{t^2-4f(x)f'(x)t+4}-t}=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{t\left[-4f(x)f'(x)+\dfrac{4}{t}\right]}{t\left(-\sqrt{1-\dfrac{4f(x)f'(x)}{t}+\dfrac{4}{t^2}}-1\right)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-4f(x)f'(x)+\dfrac{4}{t}}{-\sqrt{1-\dfrac{4f(x)f'(x)}{t}+\dfrac{4}{t^2}}-1}=$$

$$=\frac{-4f(x)f'(x)}{-2}=2f(x)f'(x)=\left(f^2(x)\right)' \quad ,x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες 5

Δ2.

Από σχέση (3)

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\sqrt{t^2-4f(x)f'(x)t+4}+t\right)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$, για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ και από Δ1

$$\left(f^2(x)\right)'=\frac{2\ln x+2}{x}\ ,x>0\Rightarrow\left(f^2(x)\right)'=2(\ln x+1)\frac{1}{x}\ ,x>0\Rightarrow$$

$$\left(f^2(x)\right)'=2(\ln x+1)(\ln x+1)'\ ,x>0\Rightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left((\ln x+1)^2\right)'\ ,x>0$$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in R$ ώστε $f^2(x)=(\ln x+1)^2+c\ ,x>0$

Για x =1 $f^2(1)=(\ln 1+1)^2+c\overset{(1)}{\Rightarrow}1^2=1^2+c\Leftrightarrow\boxed{c=0}$

Άρα $f^2(x)=(\ln x+1)^2\ ,x>0\Leftrightarrow|f(x)|=|\ln x+1|\ ,x>0\quad(4)$

$|\ln x+1|=0\Leftrightarrow\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$, άρα από (4) $f(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$ άρα $f(x)\neq0\ \ \forall x\in\left(0,e^{-1}\right)\cup\left(e^{-1},+\infty\right)$ κι επειδή f συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

Από (1) f(1)=1>0 άρα $f(x)>0 \ \ \forall x\in\left(e^{-1},+\infty\right)$

Από (3) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ άρα υπάρχει κ κοντά στο 0 και κ>0 τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$, άρα $f(x)<0 \ \ \forall x\in\left(0,e^{-1}\right)$

Επίσης ισχύουν $\ln x+1>0 \ \ \forall x>e^{-1}$ και $\ln x+1<0 \ \ \forall 0<x<e^{-1}$

Από (4) έχουμε: $\left.\begin{cases} -f(x)=-(\ln x+1) & ,0<x<e^{-1} \\ f(1)=1 & \\ f(x)=(\ln x+1) & ,e^{-1}<x \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x)=\ln x+1 \ \ ,x>0}$

Μονάδες 5

Δ3. Η σχέση ισοδύναμα γίνεται:

$$f(\alpha)<\frac{\alpha\beta^2\ln\beta-\alpha^2\beta\ln\alpha}{\alpha\beta^2-\alpha^2\beta}<f(\beta)\Leftrightarrow f(\alpha)<\frac{\alpha\beta\left(\beta\ln\beta-\alpha\beta\ln\alpha\right)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}<f(\beta)\Leftrightarrow$$

$$f(\alpha)<\frac{\beta\ln\beta-\alpha\beta\ln\alpha}{\beta-\alpha}<f(\beta) \quad (5) \ \text{για κάθε } \alpha,\ \beta\in(0,\ +\infty) \text{ με } \alpha<\beta.$$

Έστω συνάρτηση g με $g(x)=x\ln x \ \ ,x>0$ με $g'(x)=\ln x+1 \ \ ,x>0$

Από Θ.Μ.Τ. για την g στο [α, β] έχουμε:

υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow \ln\xi+1=\dfrac{\beta\ln\beta-\alpha\beta\ln\alpha}{\beta-\alpha}$

$$\xi\in(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow\ln\alpha<\ln\xi<\ln\beta\Leftrightarrow\ln\alpha+1<\ln\xi+1<\ln\beta+1\Leftrightarrow$$

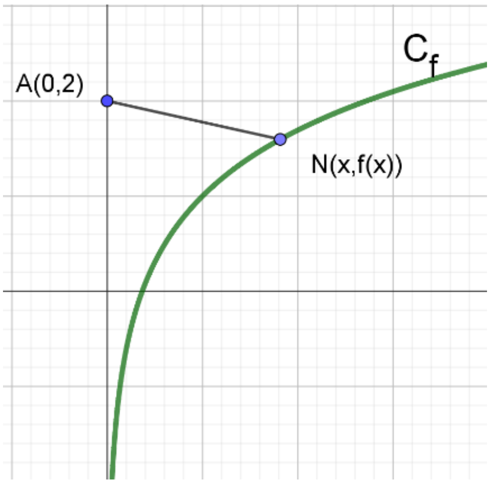
$$\ln\alpha+1<\frac{\beta\ln\beta-\alpha\beta\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\ln\beta+1\Leftrightarrow f(\alpha)<\frac{\beta\ln\beta-\alpha\beta\ln\alpha}{\beta-\alpha}<f(\beta)$$

Άρα αποδείξαμε την (5) ισοδύναμα την αρχική σχέση.

Μονάδες 5

Δ4. Έστω σημείο $N\left(x,f(x)\right),x>0$ τυχαίο σημείο της C_f.

Η απόσταση του Ν από το Α δίνεται από τη σχέση



$$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(f(x)-2)^2}=\sqrt{x^2+(\ln x-1)^2} \quad ,x>0$$

$$d'(x)=\frac{2x+2(\ln x-1)\frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2+(\ln x-1)^2}}=\frac{x^2+\ln x-1}{x\sqrt{x^2+(\ln x-1)^2}} \quad ,x>0$$

Έστω $h(x)=x^2+\ln x-1$ $,x>0$. Ισχύει $h(1)=1^2+\ln 1-1=0$ και h γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ αφού $h'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ $,\forall x>0$.

Άρα x=1 μοναδική ρίζα της h(x) = 0 , άρα και της $d'(x)=0$,

Για $0<x<1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(1) \Rightarrow x^2+\ln x-1<0$ και για $x>1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)>h(1) \Rightarrow x^2+\ln x-1>0$.

Το πρόσημο της d΄(x) δίνεται από τον πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$x^2+lnx-1$		-	0	+	
$d'(x)$		-	0	+	
d		↘		↗	

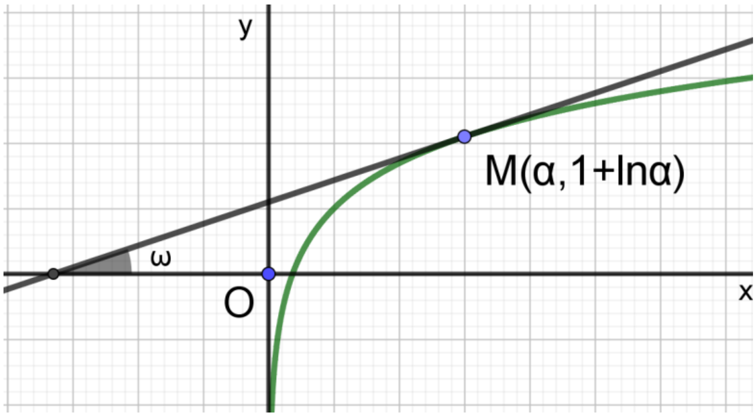
ελάχιστο
d(1)

Άρα η d γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η d παρουσιάζει ολικό ελάχιστο (μόνο) στο 1 το d(1).

Άρα σημείο N_0 της γραφικής παράστασης της f που είναι πιο κοντά στο σημείο $A(0,2)$ είναι το $N_0(1,f(1)) \Rightarrow \boxed{N_0(1,1)}$.

Μονάδες 5

Δ5.



Έστω ε εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(\alpha,1+\ln\alpha\right)$ και $\omega=(\varepsilon,xx')$.

Γνωρίζουμε ότι $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega$ κι επειδή ε εφαπτομένη της C_f στο σημείο M ισχύει $\lambda_\varepsilon=f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$ (1). Άρα :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\left(\varepsilon\varphi\omega(t)\right)'=\left(\frac{1}{\alpha(t)}\right)'\Rightarrow\frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=-\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\Rightarrow\omega'(t)=-\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)$$

Για t_0 = 2sec έχουμε: $\omega'(2)=-\dfrac{\alpha'(2)}{\alpha^2(2)}\sigma\upsilon\nu^2\omega(2)$ (2)

Έχουμε $\alpha'(t)=2\overset{\Theta.M.T.}{\Rightarrow}\alpha(t)=2t+c\ \ ,c\in R\ \ ,t\geq 0$. Το M ξεκινά από το σημείο K(1,1) της C_f, άρα $\alpha\left(0\right)=1\Leftrightarrow 2\cdot 0+c=1\Leftrightarrow\boxed{c=1}$, άρα $\alpha(t)=2t+1\ \ ,t\geq 0$,

άρα $\alpha\left(2\right)=5\ \ ,\alpha'\left(2\right)=2$, και $\sigma\upsilon\nu^2\omega(2)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega(2)}\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\alpha(2)}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{25}}=\dfrac{25}{26}$

Από (2): $\omega'(2)=-\dfrac{2}{25}\cdot\dfrac{25}{26}=-\dfrac{1}{13}$rad / sec.