“ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ” και “ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ”

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

14 ΜΑΡΤΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

β) Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5(3+2)

Α2. Να αποδείξετε ότι : αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α3.Θεωρήστε τον **παρακάτω** ισχυρισμό :

«Αν $\int_0^5 f(x)dx = 10$, το ελάχιστο της f στο διάστημα [0,5] **δεν** μπορεί να είναι 3. »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι α λ η θ ή ς , ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μ ο ν ά δ α 1)

β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μ ο ν ά δ ε ς 3)

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον **παρακάτω** ισχυρισμό :

«Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ με $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε ισχύει πάντα $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι α λ η θ ή ς , ή το γράμμα Ψ, αν είνα ψ ε υ δ ή ς. (μ ο ν ά δ α 1)

β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μ ο ν ά δ ε ς 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \to 0}\left(x^2 f(x)\right) = 0$

Σ Λ

β) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο [α, β] με f(α) > f(β), τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$

Σ Λ

γ) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Σ Λ

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνεχής συνάρτηση f και F παράγουσα της f με $F(0) = 0$ για τις οποίες ισχύει : $f(x) = 3 + 2F(x)$ για κάθε $x \in R$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$, είναι σταθερή στο R και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Β2. Αν ο τύπος της f είναι $f(x) = 3e^{2x}$,να μελετήσετε ως προς μονοτονία και ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής καθώς και ασύμπτωτες. Με βάση την παραπάνω μελέτη να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα xx΄ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 0$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$.

Μονάδες 5(3+2)

Β4. Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο τομής με τον άξονα yy΄. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την εφαπτομένη ε , τον άξονα xx΄ και την ευθεία x = -1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $f:(1,+\infty) \to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε x>1να ισχύει $x \cdot f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}$ και $f(e) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x$, $x > 1$, είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 4

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.

Μονάδες 8(4+4)

Γ2. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $x\cdot f'(x)+x^2f''(x)=2$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)
- f(1) = 0 (2)
- f΄(1) = 2 (3)

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln^2 x+2\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x = 1 και x = e.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\eta\mu\alpha+\int_1^\alpha f(x)dx}{\alpha\ln^2\alpha+1}$.

Μονάδες 15(5+5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f (0,+∞)→ R, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- f(1)=1 (1)
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ (2)
- $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\sqrt{t^2-4f(x)f'(x)t+4}+t\right)=\frac{2\ln x+2}{x}$, για κάθε x ∈ (0 , +∞) (3)

Δ1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\sqrt{t^2-4f(x)f'(x)t+4}+t\right)=\left(f^2(x)\right)'$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+1$ για κάθε x ∈ (0 , +∞).

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι $f(\alpha)<\frac{\alpha\beta^2\ln\beta-\alpha^2\beta\ln\alpha}{\alpha\beta^2-\alpha^2\beta}<f(\beta)$, για κάθε α, β ∈ (0 , +∞) με α<β

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το σημείο N_0 της γραφικής παράστασης της f που είναι πιο κοντά στο σημείο Α(0,2)

Μονάδες 5

Δ5. Αν το σημείο $M(\alpha, 1+\ln\alpha)$ κινείται στη C_f ξεκινώντας από το σημείο Κ(1,1) της C_f , με την τετμημένη του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2cm/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ, με τον άξονα xx΄, τη χρονική στιγμή t_0 = 2sec.