ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ:26-04-22

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) = ln|x|, x∈R* είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει: $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$

Μονάδες 9

Α2. α) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η f ορίζεται στο [α, β] με f(α) < 0 και f(β) > 0 τότε υπάρχει κατ' ανάγκη ξ ∈ (α, β) ώστε f(ξ) = 0.

β) Αν μια συνάρτηση f : A→R είναι 1−1, παραγωγίσιμη στο A και $f'(x)\neq 0, \forall x\in A$ τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο f(A) και ισχύει: $\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, x\in f(A)$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B),όπου $A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και B= $\lim_{x\to\beta^-} f(x)$

δ) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2\ln x + x^2 - 1$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτηση f και το σύνολο των τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$

Μονάδες 5

Β5. Αν α, β > 0 και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}$, να αποδείξετε ότι α =β.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to R$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $g^2(x) = g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

$f(1) = 2$ και $g(1) = -1$

Γ1. Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες με $x = 1$και $x = 2$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{g(x)}}$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\dfrac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (1 , e).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)= 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f'(x)=4f(x)+32x^2-16x$ για κάθε $x \in R$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{4x}-8x^2$, $x \in R$

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι : $4f(2x)< 3f(x)+ f(5x)$, για κάθε $x \in(0 , +\infty)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\left(e^2-2\right)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\ln 2$

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\big(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\big)=\left(e^{4x}-2\right)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 9

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες 6

Α3.

Λ – Σ – Λ – Λ – Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$A_f = (0, +\infty)$

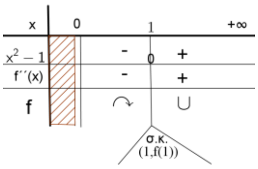
$f'(x) = \left(2\ln x + x^2 - 1\right)' = \dfrac{2}{x} + 2x > 0, \forall x > 0$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

Β2.

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{x} + x\right)' = 2\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) = 2\frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \in (0, +\infty)$$



Σημείο καμπής (1,0)

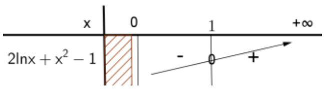
Μονάδες 5

B3.

Προφανής ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 είναι το 1, αφού :

$f\left(1\right)=0 \Leftrightarrow 2\ln 1+1^2-1=0 \Leftrightarrow 0=0$ ισχύει.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ άρα x = 1 μοναδική λύση



$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1$

f συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα. Άρα

$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(-\infty,+\infty\right)=R$ αφού,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x+x^2-1\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to +\hbar}\left(2\ln x+x^2-1\right)=+\infty$

Μονάδες 5

B4

Πρέπει $x, x^2, x^5, x^{10} \in A_f \Rightarrow x>0$

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι το 1, αφού :

$f(1)+f(1^2)=f(1^5)+f(1^{10}) \Leftrightarrow 2f(1)=2f(1)$, ισχύει

$$\text{Για } 0<x<1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^5<x \\ x^{10}<x^2 \end{matrix}\right\} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} f(x^5)<f(x) \\ f(x^{10})<f(x^2) \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f(x)+f(x^2)>f(x^5)+f(x^{10})$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0,1)$

$$\text{Για } 1<x \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x<x^5 \\ x^2<x^{10} \end{matrix}\right\} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} f(x)<f(x^5) \\ f(x^2)<f(x^{10}) \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} f(x)+f(x^2)<f(x^5)+f(x^{10})$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(1,+\infty)$.

Άρα $x = 1$ **μοναδική** λύση της εξίσωσης.

2ος τρόπος

Έστω $g(x)=f(x)+f(x^2)$ $,x\in(0,+\infty)$

$$x_1,x_2\in(0,+\infty) \text{ με } 0<x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} f(x_1)<f(x_2) \\ x_1^2<x_2^2 \Rightarrow f(x_1^2)<f(x_2^2) \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$f(x_1)+f(x_1^2)<f(x_2)+f(x_2^2) \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και «1-1»

Η εξίσωση $f(x)+f(x^2)=f(x^5)+f(x^{10})$ γίνεται:

$$g(x)=g(x^5) \overset{g\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x=x^5 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

Μονάδες 5

Β5.

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}=e^{\beta^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{e^{\beta^2}}{e^{\alpha^2}} \Leftrightarrow \alpha^2e^{\alpha^2}=\beta^2e^{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^2e^{\alpha^2}\right)=\ln\left(\beta^2e^{\beta^2}\right) \Leftrightarrow \ln\alpha^2+\ln e^{\alpha^2}=\ln\beta^2+\ln e^{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2=2\ln\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2-1=2\ln\beta+\beta^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)=f(\beta) \overset{f\text{"1-1:}}{\Leftrightarrow} \alpha=\beta$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Από (2) :

$$0<g^2(x)=g'(x)\Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Rightarrow \left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Rightarrow -\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

$g(1)=-1$ άρα $c_1=0$

Άρα $-\frac{1}{g(x)}=x\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{x},x\in(0,+\infty)$

Από (1):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{g^2(x)=g'(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)\left(g(x)-1\right)-f(x)\left(g(x)-1\right)'=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)-1}\right)'=0\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)-1}=c_2\Rightarrow f(x)=c_2\left(-\frac{1}{x}-1\right)$$

$$*\left(g(x)-1=-\frac{1}{x}-1<0,\forall x>0\right)$$

Για x = 1 $f(1)=c_2\left(-\frac{1}{1}-1\right)\Rightarrow 2=-2c_2\Rightarrow c_2=-1$

Άρα $f(x)=-\left(-\frac{1}{x}-1\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}+1,x\in(0,+\infty)$

Μονάδες 6

Γ2.

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}+1-\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1>0,\forall x\in[1,2]$$

Άρα $E=\int_1^2|f(x)-g(x)|dx=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\left[x+2\ln x\right]_1^2=1+2\ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 6

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\ (1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\overset{D'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\ldots=1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{1}=e$

Μονάδες 6

Γ4

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)'=-\frac{1}{x^2}\ ,\ x\in(0,+\infty)\ \text{ και }\ g'(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

Η εξίσωση γίνεται :

$$\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\frac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0\Leftrightarrow\frac{2e^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}-1}+\frac{2\ln x+3}{\frac{1}{x^2}+1}=0\Leftrightarrow 2e^{x-1}-2\ln x-3=0$$

Έστω $h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3$ με $x\in[1,e]$.

h συνεχής στο $[1,e]$

$$\left.\begin{aligned}&\triangleright\ h(1)=2e^{1-1}-2\ln 1-3=-1<0\\&\triangleright\ h(e)=2e^{e-1}-2\ln e-3=2e^{e-1}-5>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(1)\cdot h(e)<0$$

Από Θ.Bolzano για υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της h(x)=0 στο (1,e).

Ισχύει:

$$h'(x)=\left(2e^{x-1}-2\ln x-3\right)'=2\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)>0\ \text{ αφού :}$$

$$1<x<e\Rightarrow\begin{cases}x-1>0\Rightarrow e^{x-1}>1\\ \dfrac{1}{x}<1\end{cases}$$

Άρα η h γνησίως αύξουσα , άρα η εξίσωση

$$h(x)=0\Leftrightarrow\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\frac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0\ \text{ έχει μοναδική λύση στο } (1,e)$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για κάθε x ∈ R:

$f'(x)=4f\ (x)+32x^2-16x \Leftrightarrow f'(x)+16x=4f(x)+32x^2 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+8x^2\right)'=4\left(f(x)+8x^2\right)\overset{\cdot e^{-4x}}{\Rightarrow} e^{-4x}\left(f(x)+8x^2\right)'-4e^{-4x}\left(f(x)+8x^2\right)=0$

$\left[e^{-4x}\left(f(x)+8x^2\right)\right]'=0\ \ \forall x\in R \Rightarrow e^{-4x}\left(f(x)+8x^2\right)=c\ \ \forall x\in R$

Για x=0 : $e^{-4\cdot 0}\left(f(0)+8\cdot 0^2\right)=c \Leftrightarrow c=1$. Άρα

$e^{-4x}\left(f(x)+8x^2\right)=1 \Leftrightarrow f(x)+8x^2=e^{4x} \Leftrightarrow f(x)=e^{4x}-8x^2\ \ \forall x\in R$

Μονάδες 5

Δ2.

$f'(x)=\left(e^{4x}-8x^2\right)'=4e^{4x}-16x=4\left(e^{4x}-4x\right)$, x ∈ R

Ισχύει $\ln x \le x-1\ \forall x>0$

Για κάθε x ∈ R , $e^{4x}>0$, άρα $\ln e^{4x}\le e^{4x}-1 \Leftrightarrow e^{4x}-4x\ge 1>0$

Άρα $f'(x)>0\ \forall x\in R$, άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

Μονάδες 5

Δ3

Από Θ.Μ.Τ. για την f στα [x,2x] και [2x,5x] για x>0 έχουμε:

$\exists\, \xi_1\in(x,2x)$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x} \Rightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$

$\exists\, \xi_2\in(2x,5x)$ ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(5x)-f(2x)}{5x-2x} \Rightarrow f'(\xi_2)=\dfrac{f(5x)-f(2x)}{3x}$

Για κάθε x ∈(0 , + ∞) $f''(x)=\left(4e^{4x}-16x\right)'=16\left(e^{4x}-1\right)>0$

Άρα f ΄ γνησίως αύξουσα στο (0 , + ∞).Ισχύει

$$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(2x)-f(x)}{x}<\frac{f(5x)-f(2x)}{3x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(2x)-f(x)<\frac{f(5x)-f(2x)}{3} \Leftrightarrow 3f(2x)-3f(x)<f(5x)-f(2x) \Leftrightarrow$$

$$4f(2x)<3f(x)+f(5x) \quad \forall x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\left(e^2-2\right)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\ln 2$

Για κάθε $t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\le t\le 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(t)\le f(1) \Rightarrow$

$$e^{4\cdot\frac{1}{2}}-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\le f(t)\le e^4-8 \Rightarrow$$

$$e^2-2\le f(t)\le e^4-8 \overset{:t>0}{\Rightarrow} \frac{e^2-2}{t}\le\frac{f(t)}{t}\le\frac{e^4-8}{t}$$

κι επειδή η “=” δεν ισχύει για κάθε $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, έχουμε :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^2-2}{t}dt<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^4-8}{t}dt \Rightarrow$$

$$\left(e^2-2\right)\left[\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{1}<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\left[\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow$$

$$\left(e^2-2\right)\left(\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right)<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\left(\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(e^2-2\right)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\ln 2$$

Μονάδες 5

Δ5.

$$g(x)=2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\big(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\big)-\big(e^{4x}-2\big)\ln 4x$$

με $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$

Η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(\frac{1}{2}-1)\left(3f(\frac{1}{2})+f(\frac{5}{2})-4f(1)\right)-\left(e^{4\cdot\frac{1}{2}}-2\right)\ln 2$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt+\frac{1}{2}\left(3f(\frac{1}{2})+f(\frac{5}{2})-4f(1)\right)-\big(e^{2}-2\big)\ln 2>0 \text{ διότι :}$$

από **Δ4.** $\big(e^{2}-2\big)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-\big(e^{2}-2\big)\ln 2>0$ και

από **Δ3.** $4f(2\cdot\frac{1}{2})<3f(\frac{1}{2})+f(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow 3f(\frac{1}{2})+f(\frac{5}{2})-4f(1)>0$

$$g(1)=2\cdot 1\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(1-1)\big(3f(1)+f(5\cdot 1)-4f(2\cdot 1)\big)-\big(e^{4\cdot 1}-2\big)\ln 4$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-\big(e^{4}-2\big)\ln 4<0 \text{ διότι :}$$

από **Δ4.**

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\big(e^{4}-8\big)\ln 2 \Leftrightarrow 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<2\big(e^{4}-8\big)\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\big(e^{4}-8\big)\ln 2^{2}<\big(e^{4}-2\big)\ln 4 \Leftrightarrow 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-\big(e^{4}-2\big)\ln 4<0$$

Άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)\cdot g(1)<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$ της

εξίσωσης $g(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\left(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\right)=\left(e^{4x}-2\right)\ln 4x$$

Μονάδες 5