ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ 10-05-2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Αν $c > 0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$;

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Μονάδες (3+5)

Α2. Να βρείτε το λάθος στον επόμενο συλλογισμό **(Μονάδες 2)**. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας **(Μονάδες 2).**

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = -I$$

(θέσαμε $x = \frac{1}{u}$, οπότε $dx = -\frac{1}{u^2}du$)

Άρα I = -I , οπότε I = 0 . Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx > 0$, επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό** ή **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει ho(gof) = (hog)of .

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι [f(α), f(β)] ή [f(β), f(α)].

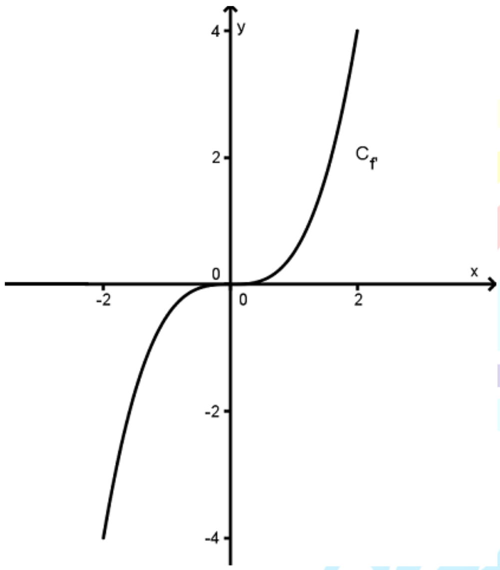
γ) Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει: $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] δεν έχει ασύμπτωτες

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$ με α, β, $\gamma \in R$ και f συνεχής στο R , τότε κατανάγκη $\beta = \gamma$.

Μονάδες 10

Α4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f΄ μιας συνάρτησης f στο διάστημα [-2, 2] . Επιλέξτε τη σωστή απάντηση **(Μονάδες 2)** και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας **(Μονάδα 1)**



Το σημείο Α(0, f(0)) είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f ,

2. θέση τοπικού ελάχιστου της f ,

3. σημείο καμπής της C_f .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (-1, +\infty) \to R^*$ με $f(0) = g(0) = 1$ και $2f'(x) + f^2(x)g(x) = 2g'(x) + f(x)g^2(x) = 0$, για κάθε x> -1.

Β1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και f = g

Μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ για κάθε $x > -1$.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x = α και x = α+1, όπου α>0 καθώς και το όριο $A = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R με τις ιδιότητες: f(π) = 1, f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ R και $2f'(x) = f^2(x) \cdot \eta\mu x$ για κάθε x ∈R .

Γ1. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτηση f είναι : $f(x) = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x + 3}$

και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι $f(R) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν g είναι μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με g(x) > 0 και $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = f(x)$ για κάθε x ∈R , να δείξετε ότι:

α) $0 \le \ln\left[\left(\dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2 \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}\right] \le \beta - \alpha$ για κάθε α, β ∈ R με α < β.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \ln(g(x))$, x ∈R τέμνει την ευθεία y = 2x, το πολύ σε ένα σημείο

γ) $1 \le E \le 2$, όπου Ε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία x = 2.

Μονάδες 17(8+4+5)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 1$
- $(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f''(1)=\dfrac{2}{3}$

Δ4. Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1) = 1$και $\left(g(x)-f(x)\right)\left(g(x)+3f(x)\right)=0$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f = g$

Δ5. Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν Α είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x x΄ και Β τυχαίο σημείο του άξονα y y΄ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο (1, f (1)).

Μονάδες 25(4 x 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ

Μονάδες (3+5)

Α2. ΘΕΩΡΙΑ

Το λάθος βρίσκεται στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$. Η αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν $x = 0$ δεν υπάρχει αντίστοιχο u.

Μονάδες 4

Α3.

Σ – Λ – Λ – Σ – Λ

Μονάδες 10

Α4. 3.

Το σημείο Α(0, f(0)) είναι:
σημείο καμπής της C_f, αφού η C_f έχει στο σημείο Α εφαπτομένη τον άξονα xx΄ και αριστερά και δεξιά του Α μεταβάλλεται η κυρτότητα της συνάρτησης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αφού $f(x), g(x) \in R^*, \forall x \in (-1, +\infty)$ και f, g συνεχείς ως παραγωγίσιμες, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο στο $(-1, +\infty)$.

$f(0)=g(0)=1>0$,άρα $f(x),g(x)>0$, $\forall x\in(-1,+\infty)$

Ισχύουν :

$$2f'(x)+f^2(x)g(x)=0\overset{\cdot g(x)}{\Leftrightarrow}2f'(x)g(x)+f^2(x)g^2(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)g(x)=-\frac{f^2(x)g^2(x)}{2}\qquad (1)$$

Ομοίως

$$2g'(x)+f(x)g^2(x)=0\overset{\cdot g(x)}{\Leftrightarrow}2g'(x)f(x)+f^2(x)g^2(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x)f(x)=-\frac{f^2(x)g^2(x)}{2}\qquad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε :

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0\overset{:g^2(x)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0,\ \forall x\in(-1,+\infty)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Για x = 0 : $\frac{f(0)}{g(0)}=c\Leftrightarrow c=1$

Άρα $\frac{f(x)}{g(x)}=1,\ \forall x\in(-1,+\infty)\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \forall x\in(-1,+\infty)$

Μονάδες 6

Β2.

Έχουμε :

$$2f'(x)+f^2(x)g(x)=0\overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow}2f'(x)+f^3(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{f^3(x)}{2}\Leftrightarrow f'(x)f^{-3}(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)'=\left(-\frac{1}{2}x\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-\frac{1}{2}x+c_1,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Για x = 0 : $\frac{f^{-2}(0)}{-2}=-\frac{1}{2}\cdot 0+c_1\Leftrightarrow c_1=-\frac{1}{2}$

Άρα

$$\frac{f^{-2}(x)}{-2}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{f^{2}(x)}=x+1\Leftrightarrow f^{2}(x)=\frac{1}{x+1},\ \forall x\in(-1,+\infty)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=g(x),\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Μονάδες 6

B3.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=-\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{x+1}=-\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}<0,\ \forall x\in(-1,+\infty)$$

Άρα f **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1,+\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$

► $\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^{+}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=+\infty$

Άρα $\boxed{x = -1}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

► $\lim\limits_{x\to+\infty)}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=0$

Άρα $\boxed{y = 0}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες 6

B4.

$$E(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+1}|f(x)|dx\overset{f(x)>0}{=}\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(\alpha)=2\left[\sqrt{x+1}\right]_{\alpha}^{\alpha+1}=2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}\text{ τ.μ.}$$

$$A=\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}2\sqrt{\alpha+2}-2\sqrt{\alpha+1}=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(2\frac{\alpha+2-\alpha-1}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\alpha+2}+\sqrt{\alpha+1}}\right)=0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1..

Επειδή $f(x) \neq 0, \forall x \in R$ η δοσμένη σχέση γράφεται :

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{1}{2}\eta\mu x \leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x\right)' \quad \forall x \in R$$

άρα υπάρχει πραγματική σταθερά c :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + c \quad \forall x \in R$$

Για $x = \pi : \frac{1}{f(\pi)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\pi + c \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$

Άρα $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x + 3} \quad \forall x \in R$

Η f είναι συνεχής στο R και $\forall x \in R$ ισχύουν:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 + \sigma\upsilon\nu x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x} \leq \frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3+\sigma\upsilon\nu x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in R \text{ και } f(\pi) = 1, f(0) = \frac{1}{2}$$

Επομένως: $f_{min}=\frac{1}{2} = f(0)$ $f_{max}=1=f(\pi)$ και f συνεχής ως πράξεις συνεχών οπότε παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές

Άρα $f(R) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Μονάδες 8

Γ2.

α)

Η ζητούμενη γράφεται ισοδύναμα :

$$0 \le \ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)^2 + \ln\left(\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}\right) \le \beta-\alpha \Leftrightarrow 0 \le 2\ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \ln\left(e^{\alpha-\beta}\right) \le \beta-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 2\ln\left(\frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) + \alpha-\beta \le \beta-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta-\alpha \le 2\left(\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)\right) \le 2\beta - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} \le 1 \qquad (1)$$

Έστω φ(x)=ln(g(x)) , $x \in R$:

φ συνεχής στο [α, β] ως σύνθεση συνεχών

φ παρ/μη στο (α, β) με $\varphi'(x) = \left(\ln(g(x))\right)' = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = f(x)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ στο (α, β) :

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha}$$

Από Γ1: $f(R) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, άρα $\frac{1}{2} \le f(\xi) \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \dfrac{\ln\left(g(\beta)\right) - \ln\left(g(\alpha)\right)}{\beta-\alpha} \le 1$

Άρα εδείχθη η (1)

β)

1ος τρόπος

Έστω συνάρτηση $s(x) = \varphi(x) - 2x = \ln(g(x)) - 2x$, $x \in R$

$s'(x) = \left(\ln(g(x)) - 2x\right)' = \dfrac{g'(x)}{g(x)} - 2 = f(x) - 2 < 0 \ \forall x \in R$ αφού

$f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\forall x \in R$. Άρα s γνησίως φθίνουσα στο R, άρα η εξίσωση

$s(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο R, ισοδύναμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \ln(g(x))$, x ∈R τέμνει την ευθεία y = 2x, το πολύ σε ένα σημείο.

2^{ος} τρόπος

έστω ότι οι C_φ και η y = 2x τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία με τετμημένες κ, λ και έστω κ < λ

Αν K(x)=φ(x)-2x τότε:

K συνεχής στο [κ, λ]…

K παρ/μη στο (κ, λ) …. με $K'(x) = \varphi'(x) - 2 = f(x) - 2$

K(κ) = K(λ)=0

Από Θεώρημα Rolle υπάρχει

$x_0 \in (\kappa, \lambda): K'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2$ Άτοπο

αφού $f(R) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

γ)

για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $f(x) > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^2 f(x)dx$.

Ισχύουν:

$$\frac{1}{2} \le f(x) \le 1 \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{2}dx \le \int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 1dx \Rightarrow \frac{1}{2}[x]_0^2 \le E \le [x]_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2-0) \le E \le 2 - 0 \Rightarrow 1 \le E \le 2$$

Μονάδες 17(8+4+5)

ΘΕΜΑ Δ
Δ1.

$$(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow(x-1)f''(x)+f'(x)+f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$\big((x-1)f'(x)\big)'+f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\big((x-1)f'(x)+f(x)\big)'=\left(\frac{1}{x}\right)',\forall x>0\Rightarrow$$

$$(x-1)f'(x)+f(x)=\frac{1}{x}+c_1 \qquad\qquad (2)$$

Για $x = 1$ στην (1) έχουμε : $(1-1)f''(1)+2f'(1)=-\frac{1}{1^2}\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

Για $x = 1$ στην (2) έχουμε :

$(2-1)f'(1)+f(1)=\frac{1}{2}+c_1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+c_1\Leftrightarrow c_1=0$. Άρα:

$$(x-1)f'(x)+f(x)=\frac{1}{x},\forall x>0\Rightarrow\big((x-1)f(x)\big)'=(\ln x)',\forall x>0\Rightarrow$$

$$(x-1)f(x)=\ln x+c_2,\forall x>0 \qquad\qquad (3)$$

Για $x = 1$ στην (3) έχουμε : $(1-1)f(1)=\ln 1+c_2\Rightarrow c_2=0$.

Άρα $(x-1)f(x)=\ln x,\ \forall x>0\Rightarrow\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1} & ,0<x\neq 1\\ \quad 1 & ,\quad x=1\end{cases}$

Δ2.

Για $0<x\neq1, f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ και $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$

- $(x-1)^2>0$ για κάθε $0<x\neq1$
- Έστω $\phi(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$, $x>0$, $\phi'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$, $x>0$

x	0		1		$+\infty$
φ'(x)		+	0	-	
φ		↗	μεγ. φ(1)=0	↘	

Άρα

$$\phi(x)<\varphi(1)\Leftrightarrow1-\frac{1}{x}-\ln x<0,\forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Άρα

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-		-	
f		↘		↘	

Κι επειδή f συνεχής στο 1 , άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα

$$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)\overset{D'H}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

Άρα $\boxed{f\left((0,+\infty)\right)=(0,+\infty)}$

Δ3.

Γνωρίζουμε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Άρα ισχύει :

$$f''(1)=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{x-1}=\frac{2-\frac{2}{x}-2\ln x+(x-1)^2}{2(x-1)^3}=$$

$$\overset{D'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}+2(x-1)}{6(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2-2x+2x^2(x-1)}{x^2}}{6(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2(x-1)-2(x-1)}{6x^2(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)^2(x+1)}{6x^2(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{3x^2}=\frac{2}{3}\Rightarrow f''(1)=\frac{2}{3}$$

Δ4.

Για κάθε $x>0$ έχουμε :

$$\left(g(x)-f(x)\right)\left(g(x)+3f(x)\right)=0\Leftrightarrow g^2(x)+2f(x)g(x)-3f^2(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x)+2f(x)g(x)+f^2(x)=4f^2(x)\Leftrightarrow\left(f(x)+g(x)\right)^2=\left(2f(x)\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|f(x)+g(x)\right|=\left|2f(x)\right|,\ \forall x>0 \qquad (4)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$, άρα $f(x)>0$, $\forall x>0$

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)+g(x_0)=0$. Για $x=x_0$ στην

(4) έχουμε $|f(x_0)+g(x_0)|=|2f(x_0)| \overset{2f(x_0)>0}{\Rightarrow} 0=2f(x_0)$ Άτοπο.

Άρα $f(x)+g(x)\neq 0$, $\forall x>0$ και αφού $f(x)+g(x)$ συνεχής ως άθροισμα

συνεχών , διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$, f(1)+g(1) = 2 > 0

Άρα $f(x)+g(x)>0$, $\forall x>0$.

Από (4): $f(x)+g(x)=2f(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $\forall x>0$

Δ5.

Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ. Ισχύει:

$E=(AMB)=\frac{1}{2}(AM)(B\Gamma)$, όπου ΒΓ

ύψος του τριγώνου προς την ΑΜ.

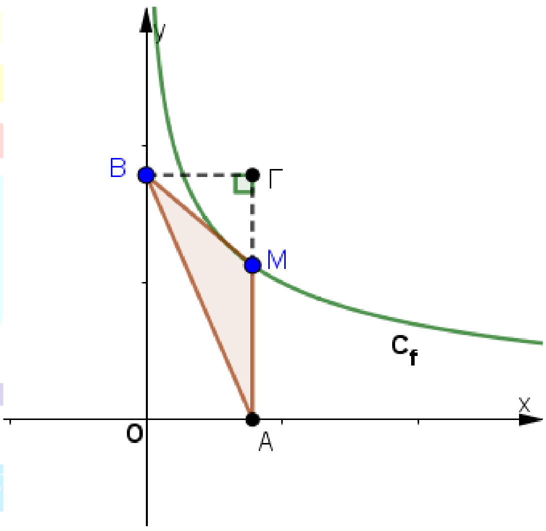
M(x,f(x)) και A(x,0), άρα

(AM)=|f(x)| και (ΒΓ)=|x|.

Όμως x>0 και f(x)>0 αφού το

σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$.

Άρα $E=\frac{1}{2}|f(x)||x|=\frac{1}{2}f(x)\cdot x$



2ος τρόπος

Έστω Β(0,β)

$$E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & f(x)\\ -x & \beta\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x\cdot f(x)|=\frac{1}{2}x\cdot f(x)$$

$$E'(t)=\left(\frac{1}{2}f(x(t))\cdot x(t)\right)'=\frac{1}{2}f'(x(t))\cdot x'(t)\cdot x(t)+\frac{1}{2}f(x(t))\cdot x'(t)\Leftrightarrow$$

$$E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)\cdot\left(f'(x(t))\cdot x(t)+f(x(t))\right)$$

Για $t = t_0 : E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0) \cdot \left(f'(x(t_0)) \cdot x(t_0) + f(x(t_0)) \right)$

$x'(t_0) = 4 cm/sec$, $f(x(t_0) = f(1) = 1$, $f'(x(t_0)) = f'(1) \overset{(\alpha)}{=} -\frac{1}{2}$

Άρα $E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 4 \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) = 1\, cm^2 / sec$

Μονάδες 25(4 x 5)