

ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ” και “ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ”

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2 ΜΑΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

β) Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4(2+2)

A2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

$$\ll I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I$$

(θέσαμε $x = \frac{1}{u}$, οπότε $dx = -\frac{1}{u^2} du$). Άρα $I = -I$, οπότε $I = 0$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι α λ η ή ς, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψ ε υ δ ή ς. (μ ο ν ά δ α 1)

β . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μ ο ν ά δ ε ς 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν για μια συνάρτηση f , για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f .

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις

της f , τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega) = \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

δ) Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ε) Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάντα στην ευθεία $(\delta): y = x$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$, $x > 0$

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2e - f(x)) > e$.

Μονάδες 5

B3. Να λύσετε την εξίσωση $\ln x - (ex + 1)\left(\frac{e}{x} - \frac{1}{e}\right) = 2$.

Μονάδες 5

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική της παράσταση, τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$

β) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq \alpha$ για κάθε $x > 0$, τότε $\frac{\alpha}{2} + e \geq 1$.

Μονάδες 9(4+5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f , με $D_f = f(D_f) = [1, 4]$, δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$. Έστω, επίσης συνάρτηση g με $g(x) = \ln x + 4x - 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 4x^2 \geq 4(x+2)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1, 4]$ ώστε: $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{f(\xi)}{\xi}}\right) = \xi - f(\xi)$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν επιπλέον $f(1) = 4f(4)$:

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 4)$ ώστε $x_0 f(x_0) [f(x_0) + x_0 f'(x_0)] = 0$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 4)$ τέτοια ώστε: $f'(x_1) + 2f'(x_2) = -3$.

Μονάδες 10(5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, γνησίως φθίνουσα,

κυρτή για την οποία επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \ln 2}{x^2 + x} = -\frac{1}{2}$.

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν F είναι μια παράγουσα της f με $F(0) = 0$, τότε να υπολογίσετε εφόσον υπάρχει το

όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4F(x) + x^2 - 4f(0) \cdot x}$

Μονάδες 7

Αν $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ για το οποίο ισχύει: $f(x_0) = x_0$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^{2x_0} x f'(x - x_0) dx = 2x_0^2 - x_0 \ln 2 - \int_0^{x_0} f(x) dx$, όπου x_0 ο θετικός

αριθμός του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 6